ГЛАВА 5. ПОВЕРХНОСТИ

5.1. Определение и задание на чертеже. Классификация

В начертательной геометрии поверхности рассматриваются как множество последовательных положений движущейся линии. Такой способ образования поверхности называется *кинематическим.*

Линия (кривая или прямая), перемещающаяся в пространстве и создающая поверхность, называется *образующей.* Как правило, образующая перемещается по второй линии, которая называется *направляющей.*

Кроме рассмотренного выше кинематического способа, поверхность может быть задана:

- *аналитически,* то есть описана математическим выражением;
- *каркасным* способом, который используется при задании сложных поверхностей, не подчиняющихся никаким законам.

В последнем случае для задания поверхности необходимо иметь ряд ее параллельных сечений (каркас), которые можно рассматривать как положения образующей переменного вида. Такой способ находит применение при изготовлении кузовов автомобилей, в самолето - и судостроении и т. д.

Способ задания поверхности каркасом, например, с помощью линий пересечения поверхности плоскостями уровня, применяется в топографии, горном и дорожном деле. Проекции линии уровня на плоскость проекций с соответствующими отметками представляют собой карту рельефа местности. Поверхность, отнесенная к земной поверхности, называется *топографической.*

Чтобы задать поверхность на комплексном чертеже, достаточно иметь на нем такие элементы поверхности, которые позволяют построить каждую ее точку. Совокупность этих элементов называют *определителем поверхности*. Определитель поверхности состоит из двух частей*: геометрической части,* включающей постоянные геометрические элементы (точки, линии), которые участвуют в образовании поверхности; *алгоритмической части,* задающей закон движения образующей, характер изменения ее формы.

Когда какая-нибудь поверхность Ω проецируется параллельно на плоскость проекций *P*, то проецирующие прямые, касающиеся поверхности Ω**,** образуют цилиндрическую поверхность (рис. 5.1). Эти проецирующиеся прямые касаются поверхности Ω в точках, образующих некоторую линию *m*, называемую контурной линией.

Проекция контурной линии *m* на плоскость P - m_p, называется *очерком поверхности*.

Для придания чертежу большей наглядности в большинстве случаев строят *очерк поверхности*, а также ее наиболее важные линии и точки.

CHAPTER 5. SURFACES

5.1 Determining and Specifying Surfaces in a Drawing. Classification

In descriptive geometry surfaces are referred to as a set of consecutive locations of a moving line. This method of a surface formation is called the *kinematic* method.

A line (a curved or a straight one) moving in space and producing a surface is called a *generatrix* **(**a generating line). As a rule, this line moves along another one, called a *directrix* (a directional line).

Except mentioned above kinematic method, the surface may be specified by: the *analytical* method, i.e. presented in a mathematical expression; and the *frame* method which is used for specifying complex surfaces subjected to no rules.

In this case, to specify a surface, a number of its parallel sections (frame) is required which may be referred to as the locations of a variable generatrix. This method is used in lorry body manufacturing, in aircraft industry, shipbuilding, etc.

Method of specifying a surface by a frame, for instance, by intersection lines of a surface with level planes, is applied in topography, mining, road making. Projections of a level line on a projection plane with the corresponding marks represent a relief landscape map. A surface referred to as the earth one, is called *topographic* surface.

To specify a surface in a complex drawing it is necessary to present in it only those elements of a surface which give the opportunity to construct each of its points. A collection of these elements is called surface determinant. Surface determinant consists of two parts: a *geometric part*, including constant geometric elements (points, lines), which form the surface; and an *algorithm part*, specifying the principle of generating line motion, the nature of its form modification.

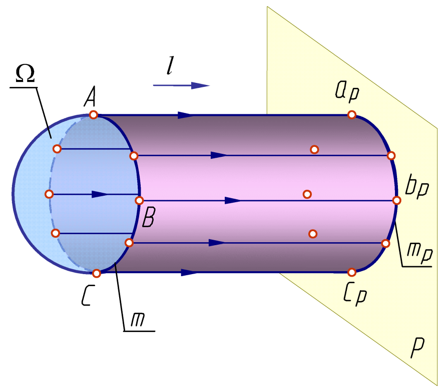


Fig. 5.1 (Рис. 5.1)

When a surface Ω is projected on the projection plane *P* in a parallel way, projecting lines tangential to Ω, form a cylindrical surface (Fig. 5.1). These projecting lines contact the surface Ω in certain points, forming the line *M* which is called a level line.

Projection of the level line *M* on the plane P-m_p, is called the surface outline.

To simplify understanding of a drawing, the draughtsmen represent not only outline of the surface but also its most significant lines and points.

Классификация поверхностей

Из множества различных поверхностей выделяется несколько классов в зависимости от формы образующей, а также формы, числа и расположения направляющих:

1. Поверхности закономерные и незакономерные;
2. Линейчатые (образованные перемещением прямой линии) и нелинейчатые (криволинейные) поверхности;
3. Поверхности развертывающиеся (или торсы) и неразвертывающиеся;
4. Поверхности с образующей постоянной формы и поверхности с образующей переменной формы;
5. Поверхности с поступательным, вращательным или винтовым движением образующей.

5.2. Точка и линия на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-нибудь линии, принадлежащей поверхности.

Линия принадлежит поверхности, если она проходит через точки, принадлежащие поверхности. Прямая линия принадлежит поверхности, если она проходит через две точки, принадлежащие поверхности.

Следовательно, если точка принадлежит поверхности, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям линии этой поверхности.

Для построения точек, лежащих на поверхностях, пользуются простейшими линиями этой поверхности.

5.3. Гранные поверхности и многогранники. Пересечение многогранников плоскостями

Гранной поверхностью называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. Гранные поверхности можно подразделить на два вида: пирамидальные (рис. 5.2) и призматические (рис. 5.3).

Пирамидальной называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят через некоторую неподвижную точку *S*.

Призматической называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят параллельно некоторому заданному направлению *l*.

Точки *M* и *N* принадлежат соответственно пирамидальной и призматической поверхностям, так как принадлежат прямым, расположенным на этих поверхностях.

Classification of the Surfaces

There is a great quantity of different surfaces. But some of them are considered to be the most significant. Classification of them depends on generatrix form, also on the form, number and location of directrices:

1. Regular and nonregular surfaces;
2. Ruled surfaces (formed by a travel of a straight line) and nonruled (curvelined) surfaces;
3. Developable surfaces (or torses) and nondevelopable ones;
4. Surfaces with generatrix of a constant form and of a variable form;
5. Surfaces with translational, rotary and helical motion of generatrix.

5.2 A Point and a Line on the Surface

A point belongs to a surface when it belongs to a line of the surface.

A line belongs to a surface when it passes through the points of the surface. A straight line belongs to a surface when it passes through two points belonging to the surface.

Hence, if a point belongs to a surface, its projections belong to the like projections of the surface line.

To construct the points lying on a surface, use the prime lines of this surface.

5.3 Polyhedral Surfaces and Polyhedrons. A Polyhedron Cut by a Plane

A polyhedral surface is a surface formed by a travel of a linear generating line along a polygonal directrix. Polyhedral surfaces are divided into two kinds: pyramidal (Fig. 5.2) and prismatic (Fig. 5.3) surfaces.

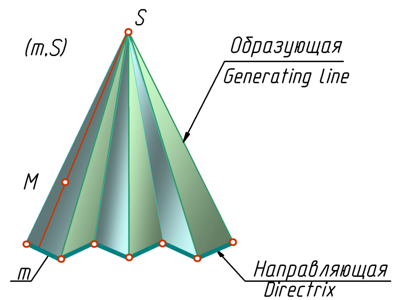


Fig. 5.2 (Рис. 5.2)

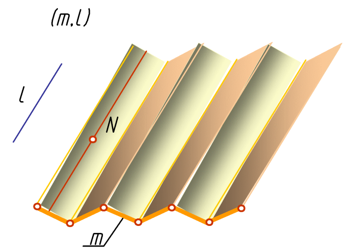


Fig. 5.3 (Рис. 5.3)

A *pyramidal* surface is a surface obtained by a travel of a linear generatrix along a polygonal directrix. Note: All generating lines pass through a certain fixed point *S*.

A *prismatic* surface is a surface obtained by a travel of a linear generatrix along a polygonal directrix. Note: All generating lines are parallel to a certain given direction *l*.

The points *M* and *N* belong to a pyramidal and prismatic surfaces respectively, as they belong to the straight lines contained in these surfaces.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется *телом*.

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Рассмотрение многогранников ограничим рассмотрением призм и пирамид.

Призмой называется многогранник, у которого одинаковые взаимно параллельные грани – основания, а остальные – боковые грани – параллелограммы. Если ребра боковых граней перпендикулярны основанию, то призму называют прямой.

Для задания призмы достаточно задать одно ее основание и боковое ребро (рис. 5.4).

Построив ребра *DL*, *BF* и *CQ*, параллельные и равные заданному ребру *AE*, определим второе основание, а тем самым и все грани призмы (рис. 5.5).

Чтобы построить недостающую проекцию точки, лежащей на грани многогранника, нужно через эту точку провести прямую. Например, если задана горизонтальная проекция точки *M*, принадлежащей грани *BCQF*, то для построения ее фронтальной проекции нужно через эту точку провести прямую *KN*. Тогда *m′* определится как точка, принадлежащая проекции *k′n′*.

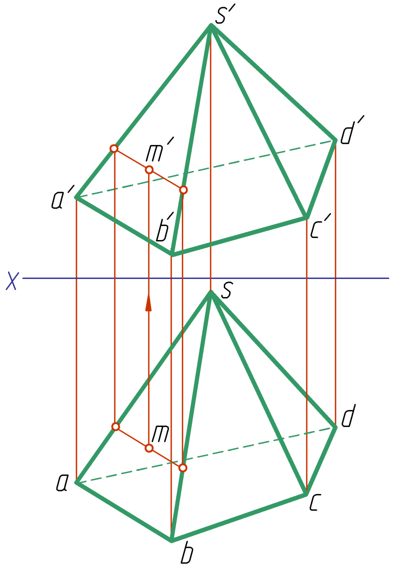


Рис. 5.6 (Fig. 5.6)

Пирамида представляет собой многогранник (рис. 5.6), у которого одна грань – произвольный многоугольник *ABCD* – принимается за основание, а остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной *S*, называемой вершиной пирамиды.

Для задания на чертеже пирамиды достаточно задать ее основание и вершину. Чтобы построить проекции точки на поверхности пирамиды, нужно через эту точку провести прямую, аналогично построению, выполненному на рис. 5.5 для призмы.

Пересечение многогранников плоскостями

В пересечении гранных поверхностей плоскостями получаются многоугольники, вершины которых определяются как точки пересечения ребер гранных поверхностей с секущей плоскостью.

Многоугольник сечения может быть найден двумя путями:

1. Вершины многоугольника находятся как точки пересечения прямых (ребер) с секущей плоскостью;

A part of space bounded in all directions by a surface is called a *body*.

A body bounded by plane polygons is called a *polyhedron*. Among all polyhedrons only prisms and pyramids are considered in this textbook.

Prism is a polyhedron with the bases being equal mutually parallel faces and the sides being parallelograms. If the edges of the sides are perpendicular to the base, the prism is a right prism.

To specify a prism it is necessary to specify its base and a lateral edge (Fig. 5.4).

Construct the edges *DL*, *BF* and *CQ* parallel and equal in length to the given edge *AE* to determine the second base and, hence, all the prism faces (Fig. 5.5).

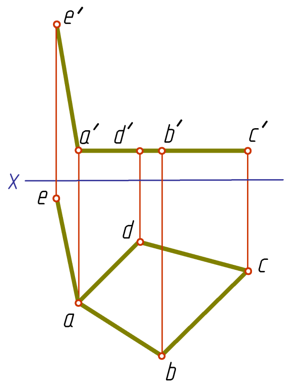


Fig. 5.4 (Рис. 5.4)

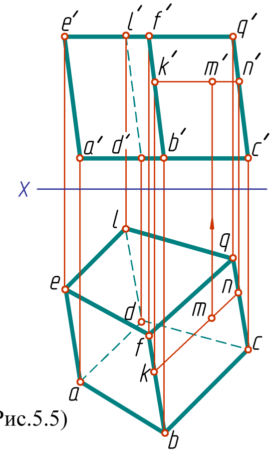


Fig. 5.5 (Рис.5.5)

To construct a lacking projection point lying on a polyhedron face draw a straight line through the above point. E.g. Given: horizontal projection of the point M belonging to the face *BCQF*. To construct its frontal projection draw the line *KN* through the given point. The point m′ is a desired point belonging to the projection *k′n′*.

Pyramid is a polyhedron (Fig. 5.6), one face of which is an arbitrary polygon *ABCD* taken for the base, the other faces (lateral) are the triangles with the common vertex *S* being called the vertex of pyramid.

To specify a pyramid it is necessary to specify its base and vertex. To construct projections of a point on a pyramid surface pass a line through this point like it was shown above (Fig. 5.5) for a prism.

A Polyhedron Cut by a Plane

When polyhedral surfaces are cut by planes we obtain polygons in the section, whose vertices are determined as the points of intersection of the polyhedron edges with a cutting plane.

A polygon obtained by cutting may be determined in two ways:

1. Its vertices may be found in the points of intersection of straight lines (the edges) with a cutting plane;

2. Стороны многоугольника находятся как линии пересечения плоскостей (граней) многогранника с секущей плоскостью.

В качестве примера построим сечение пирамиды фронтально - проецирующей плоскостью *P* (рис. 5.7).

Секущая плоскость – фронтально - проецирующая, следовательно, все линии, лежащие в этой плоскости, в том числе и фигура сечения на фронтальной проекции, совпадут с фронтальным следом *Pv* плоскости *P*. Таким образом, фронтальная проекция фигуры сечения *1′2′3′* определится при пересечении фронтальных проекций ребер пирамиды со следом *Pv*. Горизонтальные проекции точек *1, 2* и *3* находим при помощи линий связи на горизонтальных проекциях соответствующих ребер.

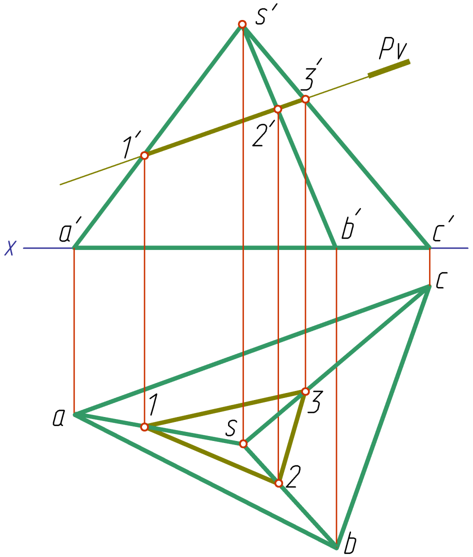


Рис. 5.7 (Fig. 5.7)

Пирамида с вырезом

В качестве примера построения сечений многогранника несколькими плоскостями рассмотрим построение пирамиды с вырезом, который образован тремя плоскостями – *P*, *R*, и *T* (рис. 5.8).

Плоскость *P*, параллельная горизонтальной плоскости проекций, пересекает поверхность пирамиды по пятиугольнику *1-2-3-K-6*. На горизонтальной плоскости проекций стороны пятиугольника параллельны проекциям сторон основания пирамиды. Построив горизонтальную проекцию пятиугольника, отмечаем точки *4* и *5*.

Фронтально - проецирующая плоскость *R* пересекает пирамиду по пятиугольнику *1-2-7-8-9*. Чтобы найти горизонтальные проекции точек *8* и *9*, проведем через них дополнительные образующие *SM* и *SN*. Вначале на фронтальной проекции–*s′m′* и *s′n′*, а затем на горизонтальной–*sm* и *sn*.

Фронтально-проецирующая плоскость *T* пересекает пирамиду по пятиугольнику *5-4-8-9-10*.

Построив горизонтальную проекцию выреза, строим его профильную проекцию.

2. Its sides may be distinguished as the lines of intersection of polyhedron planes (the faces) with a cutting plane.

Consider an example of construction of a pyramid cutting by a frontal projecting plane *P* (Fig. 5.7).

The cutting plane is a frontal projecting plane, therefore, all lines lying in this plane, including the section figure, coincide with the frontal trace P_V of the plane *P*. Thus, the intersection of the frontal projections of the pyramid edges with the trace P_V yields the frontal projection of the section figure *1′-2′-3′*. Find the horizontal projections of the points *1, 2, 3* by means of the connection lines on the horizontal projections of the corresponding edges.

A Pyramid with a Notch

As an example of drawing a polyhedron cutting by a few planes consider construction of a pyramid with a notch produced by three planes (*P*, *R* and *T*) (Fig. 5.8).

The plane *P*, parallel to the horizontal projection plane, intersects the pyramid surface along a pentagon *1-2-3-K-6*. The pentagon sides are parallel to the sides projections of the pyramid base on the horizontal projection plane. After the horizontal projection of the pentagon has been constructed, denote the points *4* and *5*.

The frontal projecting plane *R* cuts the pyramid along the pentagon *1-2-7-8-9*. To find the horizontal projections of the points *8* and *9* pass through them additional generatrices *SM* and *SN*. First do it on the frontal projection - *s′m′* and *s′n′*, then on the horizontal projection - *sm* and *sn*.

The frontal projecting plane *T* cuts the pyramid in pentagon *5-4-8-9-10*.

Having constructed the horizontal notch projection, draw its profile projection.

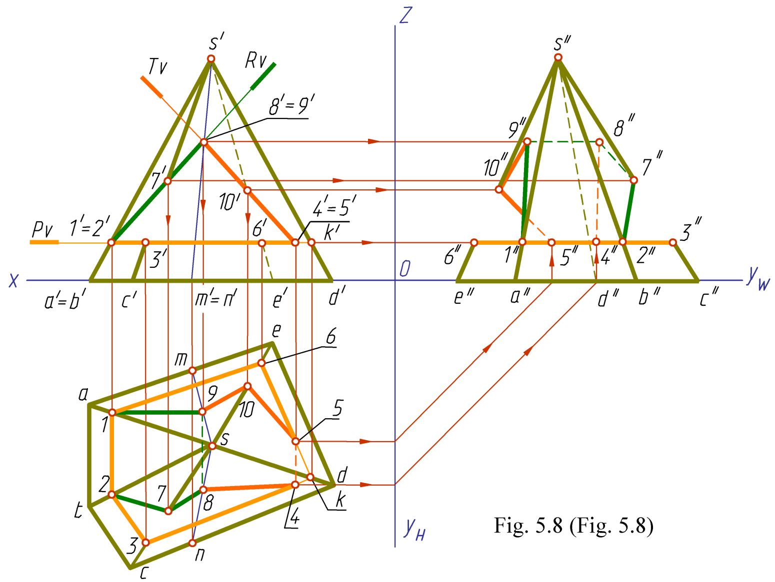


Fig. 5.8 (Fig. 5.8)

5.4. Коническая и цилиндрическая поверхности. Торсы

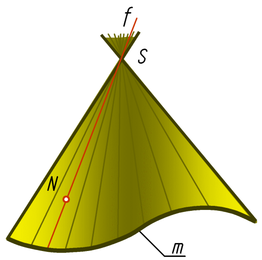


Рис. 5.9 (Fig. 5.9)

Коническая поверхность образуется движением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей. При этом образующая проходит через некоторую неподвижную точку *S*, называемую вершиной (рис. 5.9).

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямолинейной образующей параллельно заданной прямой линии *l* по криволинейной направляющей (рис. 5.10).

Точка *N* принадлежит данным поверхностям, так как она принадлежит образующей *f* этих поверхностей.

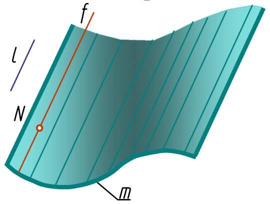


Рис. 5.10 (Fig. 5.10)

Коническая поверхность определена на чертеже, если заданы направляющая (по форме и положению) и вершина. В зависимости от вида направляющей коническая поверхность может быть замкнутой и незамкнутой. Тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, называется конусом. Конус может быть круговым, если в его основании лежит круг.

Цилиндрическая поверхность определена, если задана направляющая (по форме и положению) и образующая (по положению). Для построения чертежа цилиндрической поверхности удобно выбирать в качестве направляющей линию пересечения цилиндрической поверхности с плоскостью проекций или другой плоскостью, ей параллельной.

Цилиндрическая поверхность также может быть незамкнутой или замкнутой. Тело, ограниченное цилиндрической замкнутой поверхностью и двумя параллельными плоскостями, называется цилиндром. Цилиндрические поверхности различают по виду нормального сечения, то есть кривой линии, полученной при пересечении этой поверхности плоскостью, перпендикулярной к ее образующим, например, круговой цилиндр, эллиптический цилиндр и т.д.

Торс

Торс (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей, касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной кривой, называемой ребром возврата (“*tors*” (франц.) – витой, крученный).

Ребро возврата *m* является направляющей торса. Торс состоит из двух полостей, разделенных ребром возврата (рис. 5.11).

Если ребро возврата вырождается в точку, поверхность торса превращается в коническую. В случае, если ребро возврата вырождается в бесконечно удаленную точку, торсовая поверхность превращается в цилиндрическую.

5.4 Conical and Cylindrical Surfaces. Torses

The conical surface is produced by the motion of a linear generating line along a curved directrix. At that, the generatrix passes some fixed point *S*, referred to as a vertex (Fig. 5.9).

The cylindrical surface is produced by parallel to a given straight line *l* motion of a linear generating line along a curved directrix (Fig. 5.10).

The point *N* belongs to the given surfaces as it belongs to their generatrix *B*.

A conical surface is considered to be distinguished in a drawing when a directrix (by form and position) and a vertex are specified. Depending on the directrix form the conical surface may be closed or not. A body bounded by a conical surface and a plane is called a cone. If the base of a cone is a circle, the cone may be circular.

A cylindrical surface is considered to be distinguished if a directrix (by form and position) and a generatrix (by position) are specified. To draw a cylindrical surface It is advisable to take as a directrix a line of intersection of this surface with a projection plane or another plane parallel to it.

Cylindrical surface may also be closed or not. A body bounded by a cylindrical closed surface and two parallel planes is called a cylinder. Cylindrical surfaces are distinguished by the view of its normal section, i.e. a curve obtained by cutting the surface with a plane perpendicular to its generating lines.

Torse

Torse (a surface with a cuspidal edge) is obtained by the motion of a linear generating line tangential in all its positions to a space curve, referred to as a cuspidal edge (*tors* (Fr.) - twisted, swirled).

A cuspidal edge is a directrix of a torse. A torse consists of two sheets separated by a cuspidal edge (Fig. 5.11).

If a cuspidal edge turns into a point, the torse surface turns into a conical surface. In case the cuspidal edge turns into a point at infinity, the torse surface becomes a cylindrical one.

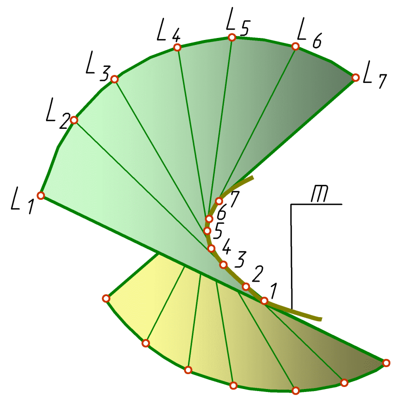


Fig. 5.11 (Рис. 5.11)

5.5. Поверхности вращения. Пересечение поверхностей вращения плоскостями

Поверхностью вращения называется поверхность, описываемая кривой (или прямой) образующей при ее вращении вокруг неподвижной оси (рис. 5.12). Эта поверхность определяется на чертеже заданием образующей и оси вращения.

Каждая точка образующей *l* описывает при своем вращении окружность с центром на оси. Эти окружности (например, окружность *1*) называются *параллелями*. Наибольшая из этих параллелей (окружность *2*) называется *экватором*, наименьшая *3 – горлом*.

Кривые, получающиеся в сечении тела вращения плоскостями, проходящими через ось, называются *меридианами*. Меридиан *4*, параллельный фронтальной плоскости проекций, называется *главным меридианом*. Все меридианы равны между собой.

На чертеже ось вращения *II* поверхности располагают перпендикулярно к одной из плоскостей проекций, например, горизонтальной, тогда все параллели проецируются на эту плоскость в истинную величину, причем экватор и горло определят горизонтальный очерк поверхности. Фронтальным очерком такой поверхности будет меридиан, расположенный во фронтальной плоскости, то есть главный меридиан.

Точки на поверхностях вращения строятся с помощью параллелей (то есть окружностей на поверхности).

Рассмотрим некоторые тела и поверхности вращения.

1. Поверхности, образованные вращением прямой линии:

а) *цилиндр вращения* – поверхность, полученная вращением прямой *l* вокруг параллельной ей оси *II* (рис. 5.13);

б) конус вращения – поверхность, образованная вращением прямой *l* вокруг пересекающейся с ней осью *II* (рис. 5.14);

в) однополостный гиперболоид вращения – поверхность, полученная вращением прямой *l* вокруг скрещивающейся с ней осью *II* (рис. 5.15). Точка *А*, лежащая на перпендикуляре к оси вращения и образующей, будет описывать наименьшую окружность, являющуюся горлом гиперболоида. Однополостный гиперболоид может быть также получен вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

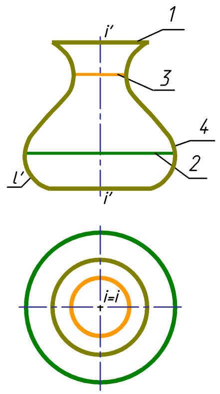
2. Поверхности, образованные вращением окружности вокруг неподвижной оси:

а) сфера – поверхность, полученная вращением окружности вокруг ее диаметра (рис. 5.16);

б) *тор* – поверхность, полученная вращением окружности вокруг оси *II*, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр (рис. 5.17 – 5. 20).

5.5 Rotation Surfaces. Rotation Surface Cut by a Plane

Rotation surface is a surface described by a curve (or a straight line), rotating on its axis (Fig. 5.12). This surface is represented in a drawing by specifying its generatrix and rotation axis.



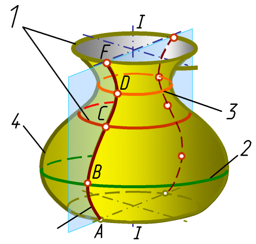


Fig. 5.12 (Рис. 5.12)

Each point of a generatrix describes, rotating, a circle with the centre on the axis. These circles (say, circle *1*) are called parallels. The largest of them (circle *2*) is called an equator, the smallest (circle *3*) - a gorge circle.

The curves obtained by cutting a rotation body by^{l} the planes, passing through the axis, are called meridians. Meridian *4*, parallel to the frontal projection plane, is referred to as the principal meridian. All meridians are equal to each other.

In a drawing the axis of a surface rotation is positioned perpendicular to one of the projection planes, say, horizontal one. Then all parallels are projected on this plane in true size, and the equator and gorge circle determine a horizontal outline of the surface. A meridian located in the frontal plane, that is the principal meridian, is considered to be a frontal outline.

The points on a rotation surface are constructed by means of parallels (i.e. the circles on the surface).

Let us consider some bodies and rotation surfaces.

1. Surfaces obtained by rotation of a straight line:

a) *cylinder* of rotation - this is a surface produced by rotation of the line *L* round the axis *I* parallel to it (Fig. 5.13);

b) *cone* of rotation - this is a surface produced by rotation of the line *L* round the axis *I* intersecting it (Fig. 5.14);

c) *one sheet hyperboloid* of rotation - this is a surface produced by rotation of the line *L* round the skew axis *I* (Fig. 5.15).

The point *A*, lying on a perpendicular to the rotation axis and generating line, describes the smallest circle, which is the gorge of hyperboloid. One sheet hyperboloid may also be obtained by rotation of hyperbola on its conjugate axis.

2. Surfaces obtained by rotation of a circle round a fixed axis:

a) *sphere* - this is a surface produced by rotation of a circle round its diameter (Fig. 5.16);

b) *torus* - this is a surface produced by rotation of a circle round the axis I lying in the plane of this circle but not passing through its centre (Fig. 5.17 through 5.20).

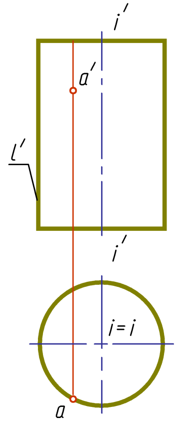


Рис. 5.13 (Fig. 5.13)

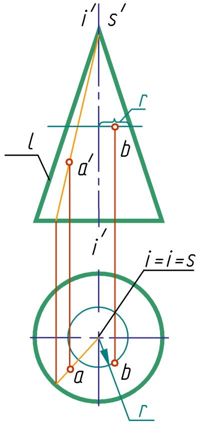


Рис. 5.14 (Fig. 5.14)

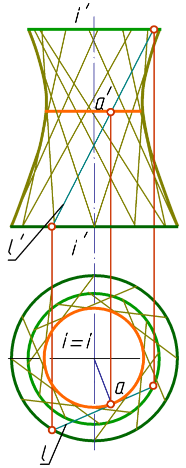


Рис. 5.15 (Fig. 5.15)

Если ось вращения проходит вне окружности, то поверхность называют открытый тор или тор – кольцо (рис. 5.17); если ось касается окружности, то образованную поверхность называют закрытый тор (рис. 5.18); если ось пересекает окружность – самопересекающийся тор (рис. 5.19, 5.20). Тор, изображенный на рис. 5.19, называют также тор-яблоко, а на рис. 5.20 – тор-лимон.

3. Поверхности вращения, образованные вращением кривых второго порядка:

а) *эллипсоид вращения* – поверхность, полученная вращением эллипса вокруг оси (рис. 5.21). Поверхность, образованная вращением эллипса вокруг его большой оси, называется вытянутый эллипсоид вращения (рис. 5.21, б), при вращении вокруг малой оси – сжатый эллипсоид вращения (рис. 5.21, а, в);

б) *параболоид вращения* – поверхность, образованная вращением параболы вокруг ее оси (рис. 5.22);

в) *двуполостный гиперболоид вращения* – поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси (рис. 5.23).

If the axis of rotation passes beyond a circle, the surface is called an open torus or a ring-torus (Fig. 5.17); if the axis is tangential to a circle, it is a closed torus (Fig. 5.18); if the axis intersects a circle - it is self-intersecting torus (Fig. 5.19, 5.20).

The torus presented by Fig.5.19 is also called an apple-torus, the one from Fig. 5.20 - a lemon-torus.

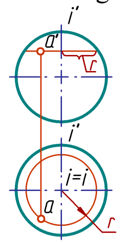
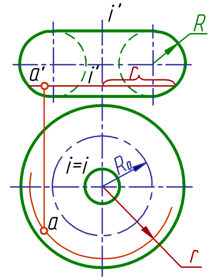
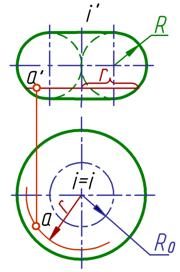


Fig. 5.16



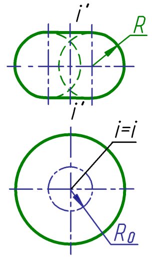
$R_0>R$

Fig. 5.17



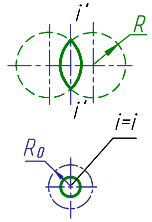
$R_0=R$

Fig. 5.18



$R_0<R$

Fig. 5.19



$R_0<R$

Fig.5.20

3. Rotation surfaces obtained by the curves of the second order:

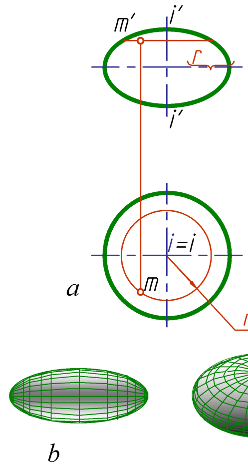


Fig. 5.21 (Рис. 5.21)

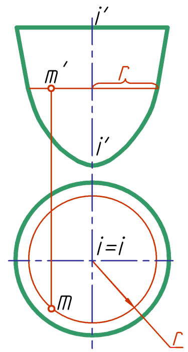


Fig. 5.22 (Рис. 5.22)

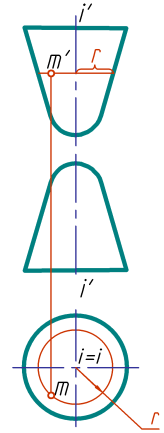


Fig. 5.23 (Рис. 5.23)

a) *ellipsoid* of rotation - this is a surface produced by rotation of an ellipse on its axis (Fig. 5.21). Surface obtained by rotation on its major axis is called an oblong ellipsoid of rotation, on its minor axis - an oblate one;

b) *paraboloid* of rotation - this is a surface produced by rotation of a parabola on its axis (Fig. 5.22);

c) two sheet *hyperboloid* of rotation - this is a surface produced by rotation of a hyperbola on its axis (Fig. 5.23).

Построение проекций линии пересечения цилиндра плоскостью

При пересечении цилиндра вращения плоскостью, параллельной оси вращения, в сечении получается пара прямых (образующих, рис. 5.24). Если секущая плоскость перпендикулярна к оси вращения, в результате сечения получится окружность (рис. 5.25). В общем случае, когда секущая плоскость наклонена к оси вращения цилиндра, в сечении получается эллипс (рис. 5.26).

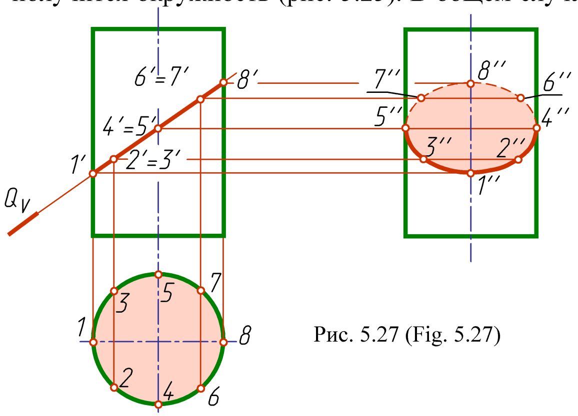


Рис. 5.27 (Fig. 5.27)

Рассмотрим пример построения проекций линии сечения цилиндра фронтально - проецирующей плоскостью Q, когда в сечении получается эллипс (рис. 5.27).

Фронтальная проекция линии сечения в этом случае совпадает с фронтальным следом плоскости Qv, а горизонтальная –с горизонтальной проекцией поверхности цилиндра – окружностью. Профильная проекция линии строится по двум имеющимся проекциям – горизонтальной и фронтальной.

В общем случае построение линии пересечения поверхности плоскостью сводится к нахождению общих точек, принадлежащих одновременно секущей плоскости и поверхности.

Для нахождения этих точек применяют метод дополнительных секущих плоскостей:

1. Проводят дополнительную плоскость;
2. Строят линии пересечения дополнительной плоскости с поверхностью и дополнительной плоскости с заданной плоскостью;
3. Определяют точки пересечения полученных линий.

Дополнительные плоскости проводят таким образом, чтобы они пересекали поверхность по наиболее простым линиям.

Нахождение точек линии пересечения начинают с определения характерных (опорных) точек. К ним относятся:

1. Верхние и нижние точки;
2. Левая и правая точки;
3. Точки границы видимости;
4. Точки, характеризующие данную линию пересечения (для эллипса – точки большой и малой осей).

Для более точного построения линии пересечения необходимо построить еще и дополнительные (промежуточные) точки.

Drawing a Projection of an Intersection Line of a Cylinder Cut by a Plane

When a cylinder of rotation is cut by a plane parallel to the rotation axis, a pair of straight lines (generatrices, Fig. 5.24) appears in the section. If a section plane is perpendicular to the axis of rotation, the cutting results in a circle (Fig. 5.25). Generally, when a cutting plane is inclined to the rotation axis of a cylinder, an ellipse is obtained by cutting (Fig. 5.26).

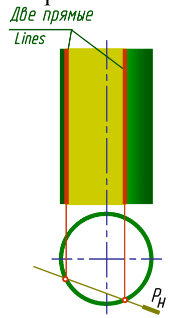


Fig. 5.24 (Рис. 5.24)

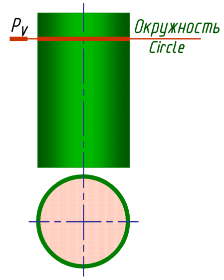


Fig. 5.25 (Рис. 5.25)

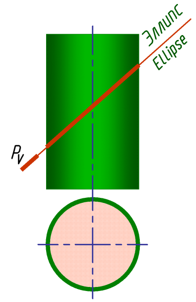


Fig. 5.26 (Рис. 5.26)

Let us consider an example of drawing an intersection line of a cylinder and a frontal projecting plane Q, when an ellipse is obtained in the section (Fig. 5.27).

The frontal projection of the section line, in this case, coincides with the frontal trace of the plane Q_V, the horizontal one - with the horizontal projection of the cylinder surface (a circle). The profile projection of the line is constructed by two projections available, the horizontal and frontal ones.

On the whole, drawing a line of intersection of a surface with a plane consists in distinguishing the common points, belonging to both, a cutting plane and a surface.

The method of auxiliary cutting planes is usually applied to find the above points:

1. Pass an auxiliary plane;
2. Construct the intersection lines of this plane with the surface and with the given plane;
3. Determine the intersection points of thus obtained lines.

The auxiliary planes should be drawn so, that they cut the surface along the prime (most simple) lines.

Determining the points of intersection start with determining the characteristic or control points. They are:

1. Upper and lower points;
2. A left and a right points;
3. Points of visibility bounds;
4. Characteristic points of a given intersection line (for an ellipse - points of major and minor axes).

To make the construction of the intersection line more accurate it is necessary to draw additional (passing) points as well.

В рассматриваемом примере точки *1* и *8* являются нижней и верхней точками. Для горизонтальной и фронтальной проекций точка *1* будет левой точкой, точка *8* – правой. Для профильной проекции точки *4* и *5* – точки границы видимости: точки, расположенные ниже точек *4* и *5* на профильной проекции будут видимыми, все остальные – нет.

Точки *2, 3* и *6, 7* – дополнительные, которые используются для большей точности построения. Профильная проекция фигуры сечения – эллипс, у которого малая ось – отрезок *1-8,* большая – *4-5.*

Построение проекций линий пересечения конуса плоскостью

В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конуса вращения могут получиться различные линии, называемые линиями конических сечений.

Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, в его сечении получается пара прямых – образующих (треугольник) (рис. 5.28, а). В результате пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной к оси конуса, получается окружность (рис. 5.28, б). Если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса и не проходит через его вершину, в сечении конуса могут получиться эллипс, парабола или гипербола (рис. 5.28, в, г, д) в зависимости от величины угла наклона секущей плоскости.

Эллипс получается в том случае, когда угол β наклона секущей плоскости меньше угла наклона α образующих конуса к его основанию ($\beta<\alpha$), то есть когда плоскость пересекает все образующие данного конуса (рис. 5.28, в).

Если углы α и β равны**,** то есть секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса, в сечении получается парабола. В этом случае секущая плоскость пересекает все образующие, кроме одной, которой она параллельна (рис. 5.28, г).

Если секущая плоскость направлена под углом, который изменяется в пределах $90° \geqslant \beta > \alpha$, то в сечении получается гипербола. В этом случае секущая плоскость параллельна двум образующим конуса. Гипербола имеет две ветви, так как коническая поверхность двуполостная (рис. 5.28, д).

Известно, что точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-нибудь линии поверхности. Для конуса наиболее графически простыми линиями являются прямые (образующие) и окружности. Следовательно, если по условию задачи требуется найти горизонтальные проекции точек *A* и *B*, принадлежащих поверхности конуса, то нужно через точки провести одну из этих линий.

Горизонтальную проекцию точки *A* найдем с помощью образующей. Для этого через точку *A* и вершину конуса *S* проведем вспомогательную фронтально - проецирующую плоскость *P(Pv).* Эта плоскость пересекает конус по двум образующим *SM* и *SN,* фронтальные проекции которых совпадают.

In the example above points *1* and *8* are the lower and the upper points. For the horizontal and frontal projections point *1* is a left point, point *8* is a right one. For the profile projections points *4* and *5* are the points of visibility bounds: the points of the line of intersection located lower than *4* and *5* are visible, all the rest are invisible.

Points *2*, *3* and *6, 7* - are additional, used for the drawing accuracy. The profile projection of the section figure is an ellipse, the minor axis of which is the segment *1-8*, the major one - *4-5*.

Drawing the Intersection Lines Projections of a Cone Cut by a Plane

Depending on the direction of a cutting plane, different lines, called the lines of conical sections, may be obtained in the section of a rotation cone.

If a cutting plane passes through a vertex of a cone, we get in its section a pair of generating lines (triangle) (Fig.5.28, a). As a result of intersection of a cone with a plane perpendicular to the cone axis, a circle is obtained (Fig. 5.28, b). If a cutting plane is inclined to the rotation axis of a cone and does not pass through its vertex, an ellipse, parabola or hyperbola may be obtained in the section (Fig. 5.28, c, d, e) - it depends on the size of inclination angle of the cutting plane.

An ellipse is obtained when the inclination angle β is less than the inclination angle α of the cone generatrix to its base ($\beta < \alpha$), that is when a plane cuts all generating lines of a given cone (Fig. 5.28, c).

In case the angles α and β are equal, i.e. a cutting plane is parallel to one of the generatrices of the cone, a parabola is obtained in the section. Here the cutting plane intersects all the generating lines except one to which it is parallel (Fig.5.28, d). If a cutting plane is inclined at an angle which changes in the following limits - $90° \geqslant \beta > \alpha$, a hyperbola is obtained in the section. The cutting plane here is parallel to two generating lines of the cone. The obtained hyperbola has two branches as the conical surface is of two sheets (Fig. 5.28, e).

It is well-known that a point belongs to a surface if it belongs to any line of this surface. The prime lines of a cone are straight (generating) lines and circles. So, if a problem statement requires to find the horizontal projections of the points *A* and *B*, belonging to a cone surface, it is necessary to pass one of the prime lines through those points.

Find the horizontal projection of the point A by means of a generating line. To do that pass an auxiliary frontal projecting plane $P(P_V)$ through the point *A* and the cone vertex *S*. This plane intersects the cone along two generatrices *SM* and *SN*, the frontal projections of which coincide.

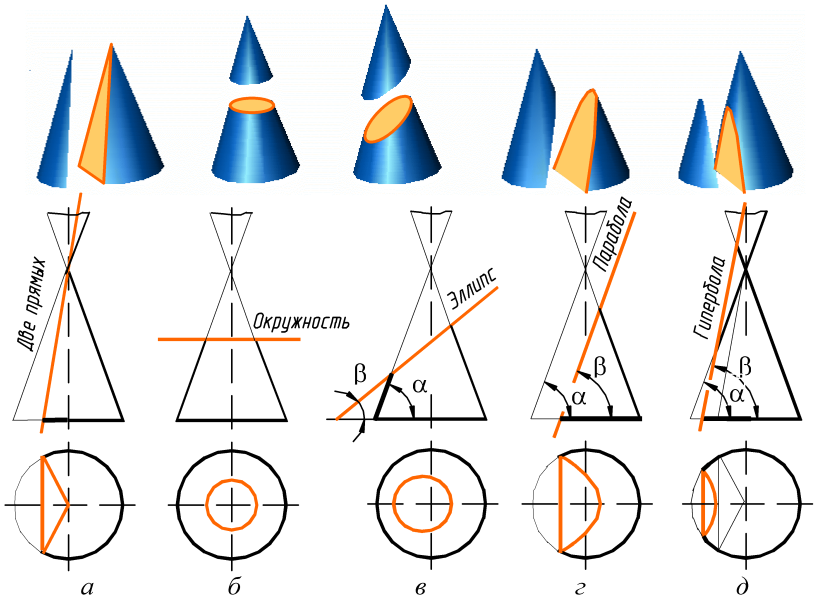


Рис. 5.28 (Fig. 5.28)

Строим горизонтальные проекции образующих и, проведя через точку a' линию связи, определим горизонтальную проекцию точки. Задача имеет два ответа: точки a_1 и a_2 (рис. 5.29).

Горизонтальную проекцию точки *B* найдем, построив окружность, на которой она лежит. Для этого через точку проведем горизонтальную плоскость *T(Tv)*. Плоскость пересекает конус по окружности радиуса *r*. Строим горизонтальную проекцию этой окружности. Через точку b' проведем линию связи до ее пересечения с окружностью. Задача также имеет два ответа – точки b_1 и b_2.

Рассмотрим пример построения проекций линии пересечения конуса фронтально - проецирующей плоскостью *P(Pv),* когда в сечении получается эллипс (рис. 5.30).

Фронтальная проекция линии сечения совпадает с фронтальным следом плоскости *Pv*.

Для удобства решения задачи обозначим крайние образующие конуса и определим характерные (опорные) точки.

Нижняя точка *1* лежит на образующей *AS,* верхняя – *2* на образующей *BS*. Эти точки определяют положение большой оси эллипса. Малая ось эллипса перпендикулярна большой оси. Чтобы найти малую ось, разделим отрезок *1-2* пополам. Точки *3* и *4* определяют малую ось эллипса. Точки *5* и *6*, расположенные на образующих *CS* и *DS,* являются точками границы видимости для профильной плоскости проекций.

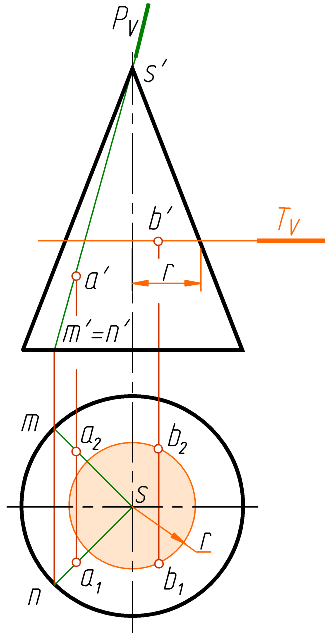


Fig. 5.29 (Рис. 5.29)

Construct the horizontal projections of the generating lines, pass a connection line through the point a' and determine the horizontal projection of the point. There are two variants of answers in this problem - the points a_1 and a_2 (Fig. 5.29).

Find the horizontal projection of the point B by construction a circle on which it is located. For that pass through the point the horizontal plane $T(T_V)$. The plane intersects the cone in a circle of radius *r*. Construct the horizontal projection of this circle. Through the point b' pass a connection line to meet the circle. There are also two answers to this problem - the points b_1 and b_2.

Now let us consider an example of drawing the projections of an intersection line of the cone cut by the frontal projecting plane $P(P_V)$, when there is an ellipse in the section (Fig. 5.30).

The frontal projection of the intersection line coincides with the frontal trace of the plane P_V.

To simplify the solution designate the utmost generatrices of the cone and determine the characteristic or control points.

The lower point *1* lies on the generatrix *AS*, the upper point *2* - on the generatrix *BS*. These points specify the value of the cone major axis. The minor axis is perpendicular to the major one. To find the minor axis bisect the segment *1*-*2*. Points *3* and *4* specify the cone minor axis. Points *5* and *6* located on the generating lines *CS* and *DS* are the points of visibility bound of the profile projection plane.

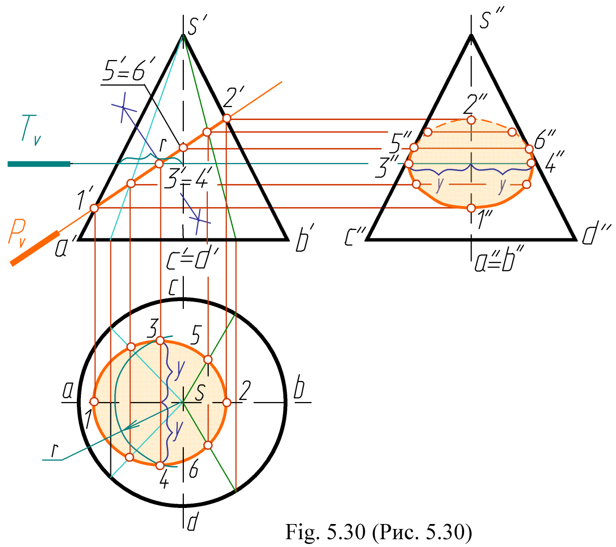


Fig. 5.30 (Рис. 5.30)

Проекции точек *1, 2, 5* и *6* находятся на соответствующих проекциях образующих. Чтобы найти проекции точек *3* и *4,* проводим дополнительную секущую плоскость *T(Tv),* которая рассекает конус по окружности радиуса *r.* На этой окружности находятся проекции данных точек. На горизонтальную плоскость проекций окружность проецируется в натуральную величину, проведя линию связи, находим горизонтальные проекции точек *3* и *4.* Профильные проекции находим, отложив на линии связи от оси конуса *y* координаты точек *3* и *4* (рис. 5.30).

Перечисленных точек недостаточно для точного построения эллипса, поэтому необходимо определить дополнительные (случайные точки). Проекции этих точек находим аналогично точкам *3* и *4*, или проводя через эти точки образующие. Найдя проекции всех точек, соединяем их с учетом видимости. На горизонтальной плоскости все точки, лежащие на поверхности конуса, видимы. На профильной – точки *5, 3, 1, 4, 6* видимы, остальные – нет.

Шаровая поверхность (сфера)

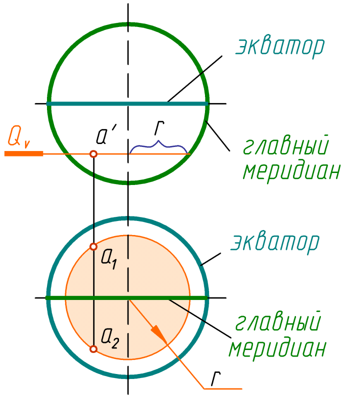


Рис. 5.31 (Fig. 5.31)

Шаровой поверхностью называется поверхность, образованная при вращении окружности вокруг своего диаметра.

Если шар пересекать плоскостью, то в сечении всегда получается окружность. Эта окружность может спроецироваться:

- *в прямую*, если секущая плоскость перпендикулярна к плоскости проекций;
- *в окружность* с радиусом, равным расстоянию от оси вращения шара до очерка (например, окружность радиуса *r* (рис. 5.31), если секущая плоскость параллельна плоскости проекций;
- *в эллипс*, если секущая плоскость не параллельна плоскости проекций.

Чтобы построить проекции точки, лежащей на поверхности шара, необходимо через нее провести секущую плоскость, параллельную плоскости проекций, и построить окружность, на которой находится эта точка.

Пересечение шара плоскостью

Пересечем поверхность шара фронтально - проецирующей плоскостью *Q* (рис. 5.32). Построение начинаем с определения характерных точек. Точки *1* и *2* находятся на главном меридиане. Эти точки – концы малой оси эллипса, а также самая высокая и самая низкая точки. Их горизонтальные и профильные проекции строим по фронтальным проекциям. Точки *3* и *4* находятся на профильном меридиане и определяют видимость на профильной плоскости проекций.

The projections of points *1, 2, 5* and *6* are situated on the corresponding projections of the generating lines. To find the projections of points *3* and *4* pass an auxiliary cutting plane $T(T_V)$, which cuts the cone in a circle of radius *r*. The projections of the given points are located on this circle. On the horizontal projection plane the circle is projected in true size, so, if we draw the connection line, we find the horizontal projections of points *3* and **4**. Lay off the co-ordinates of points *3* and *4* from the cone axis *y* on the connection line to find the profile projections (Fig. 5.30).

To make an accurate construction of an ellipse it is not enough to find the points mentioned above, hence, determine additional (arbitrary) points. Find the projections of these points in a similar fashion with points *3* and *4*, or by passing generating lines through these points. Having found the projections of all points, join them subject to visibility. All points lying on the cone surface are visible on the horizontal projection. On the profile one - only the line passing throgh points *5, 3, 1, 4, 6* are visible, the rest - are not.

Ball Surface (a Sphere)

Ball surface is a surface obtained by rotation of a circle round an axis of its diameter. A plane intersects a sphere always in a circle. This circle may be projected as:

- *a straight line* if the cutting plane is perpendicular to the projection plane;
- *a circle* of radius equal in length to distance from the axis of the sphere rotation to the outline (e.g. a circle of radius *r* (Fig. 5.31) if the cutting plane is parallel to the projection plane;
- *an ellipse* if the cutting plane is not parallel to the projection plane.

To construct the projections of a point lying on a sphere surface it is necessary to pass through the point a cutting plane parallel to the projection plane and draw the circle on which the point is located.

Cutting a Sphere by a Plane

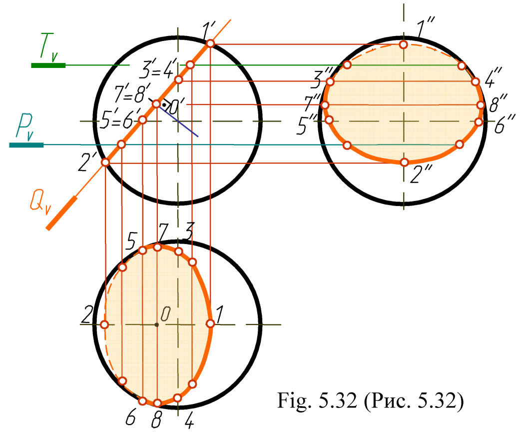


Fig. 5.32 (Рис. 5.32)

Intersect a sphere by the frontal projecting plane *Q*. To begin with, determine the characteristic points. Points *1* and *2* are located on the principal meridian. These points are the ends of the ellipse minor axis, also are the highest and the lowest points. Construct their horizontal and profile projections by means of the frontal projections. Points *3* and *4* are situated on a profile meridian and specify visibility on the profile projection plane.

Горизонтальные проекции точек находим по профильным проекциям. Точки *5* и *6* находятся на экваторе и являются точками границы видимости на горизонтальной проекции. Профильные проекции точек находим по горизонтальным проекциям. Точки *7* и *8* принадлежат концам большой оси эллипса. Они строятся следующим образом. Вначале найдена фронтальная проекция точки *o′*, центра окружности сечения, как середина отрезка *1′-2′*, затем ее горизонтальная проекция-точка *o*. Отрезки *o′1′* и *o′2′* на фронтальной проекции равны истинной величине радиуса этой окружности. На горизонтальной проекции диаметр окружности изображается без искажения, поэтому откладываем отрезки *o7* и *o8*, равные *o′1′*. Для точного построения линии сечения необходимо найти несколько дополнительных точек. Для их построения используем вспомогательные секущие плоскости, как показано на рис. 5.31. Полученные точки соединяем плавной кривой с учетом ее видимости.

5.6.Винтовые поверхности

Винтовой поверхностью называется поверхность, которая описывается какой-либо линией – образующей, при ее винтовом движении.

Если образующей винтовой поверхности является прямая линия, то поверхность называется *линейчатой винтовой поверхностью*, или *геликоидом* (от французского слова “*helice*” – спираль, винтовая линия). Геликоид называется прямым или наклонным в зависимости от того, перпендикулярна образующая к оси геликоида или наклонна.

Рассмотрим некоторые виды линейчатых винтовых поверхностей.

1. *Прямой геликоид* образуется движением прямолинейной образующей *l* по двум направляющим, из которых одна является цилиндрической винтовой линией *m*, а другая – ее осью *II*, причем во всех своих положениях образующая *l* параллельна плоскости (называемой плоскостью параллелизма), перпендикулярной оси *II*. Обычно за плоскость параллелизма принимают одну из плоскостей проекций (рис. 5.33). У прямого геликоида образующая *l* пересекает винтовую ось *II* под прямым углом. Прямой геликоид может быть отнесен к числу коноидов и назван *винтовым коноидом*.

2. *Наклонный геликоид* отличается от прямого геликоида тем, что его образующая *l* пересекает ось геликоида под постоянным углом α, отличным от прямого угла. Иначе говоря, образующая *l* наклонного геликоида при своем движении скользит по двум направляющим, одна из которых является цилиндрической винтовой линией *m*, а другая – ее осью *II*, причем во всех своих положениях образующая *l* параллельна образующим некоторого конуса вращения. У этого конуса угол между образующей и осью, параллельной оси геликоида, равен φ. Он называется направляющим конусом наклонного геликоида.

Find the horizontal projections of the points by their profile projections. Points 5 and 6 are situated on the equator and are the points of visibility bounds on the horizontal projection. Find the profile projections of the points by their horizontal ones. Points *7* and *8* belong to the ends of the ellipse longer axis. Construct them in the following way: First find the middle point of the line-segment *1′-2′* - this is the frontal projection of the point *O′*, the circle centre of the section. Then find its horizontal projection, the point *O*. The line-segments *O′1′* and *O′2′* on the frontal projection are equal to the true size of the circle radius. On the horizontal projection the diameter of the circle is projected without shortening, hence, lay off the segments *O7* and *O8* equal in length to *O′1′*. To construct more accurate section line it is necessary to find a few additional points. Use auxiliary cutting planes for that, as shown in Fig. 5.32. Then join the points thus obtained in a smooth curve subject to its visibility.

5.6 Screw Surfaces

A screw surface is a surface described by a generatrix at its helical motion.

If a generatrix of a screw surface is a straight line the surface is referred to as *a ruled screw surface or a helicoid* (*helice (Fr.)*-a spiral, a spiral staircase). A helicoid may be right or oblique depending on the generating line being perpendicular or inclined to the helicoid axis.

A few kinds of a ruled screw surface:

1. *A right helicoid* is produced by the motion of the linear generatrix *l* along two directrices, one of which is the cylindrical screw line *m*, the other is its axis *i*. Note that in all its positions the line l is parallel to the plane perpendicular to the axis *I* (called a plane of parallelism). Usually one of the projection planes is taken for the plane of parallelism (Fig. 5.33). The generatrix *l* of the right helicoid intersects the screw axis *I* at a right angle. The right helicoid may be referred to as one of the conoids and called a *screw conoid.*

2. *An oblique helicoid* is distinguished from a right one by its generatrix *l* intersecting the helicoid axis at a constant angle α different from the right angle. In other words, the generatrix *l* of an oblique helicoid slides along two directrices, one of which is the cylindrical screw line *m*, the other - its axis *I.* Note that in all its positions the line *l* is parallel to the generating lines of a certain cone of rotation. The angle of this cone included between the generating line and the axis parallel to the helicoid axis, is equal to φ. It is called a director cone of an oblique helicoid.

На рис. 5.34 показано построение проекций наклонного геликоида. Его направляющими являются цилиндрическая винтовая линия *m* и ее ось *II*. Образующие геликоида параллельны соответствующим образующим направляющего конуса.

3. *Развертывающийся геликоид* образуется движением прямолинейной образующей *l*, касающейся во всех свих положениях цилиндрической винтовой линии *m,* являющейся ребром возврата геликоида (рис. 5.35). Развертывающийся геликоид, как линейчатая поверхность с ребром возврата, относится к числу торсов.

На рис. 5.35 поверхность развертывающегося геликоида ограничена ребром возврата *m* и линией *a* от пересечения геликоида с поверхностью соосного цилиндра большего диаметра, чем диаметр винтовой линии *m*.

Если образующая *l* пересекается с осью поверхности, геликоид называется закрытым (рис. 5.33 и 5.34), если не пересекается – геликоид называется открытым (рис. 5.35).

5.7. Взаимное пересечение поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей– геометрическое место точек, принадлежащих одновременно обеим поверхностям.

Общим способом построения точек, принадлежащих кривой взаимного пересечения поверхностей, является способ вспомогательных поверхностей посредников. Этот способ сходен со способом построения линии пересечения поверхностей плоскостями и сводится к следующему.

Пусть даны некоторые взаимно пересекающиеся поверхности Φ и Ψ (рис. 5.36). Введем плоскость - посредник *Q*, который пересечет поверхности по линиям *M* и *N*, даст точки K_1 и K_2, принадлежащие кривой пересечения.

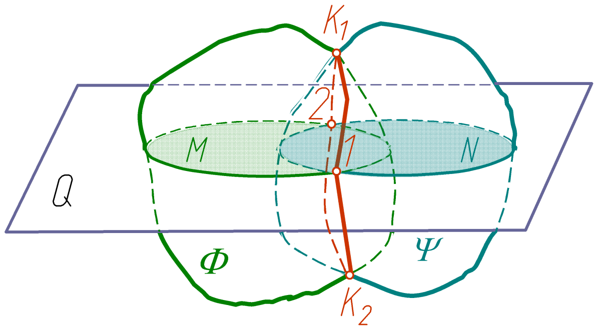
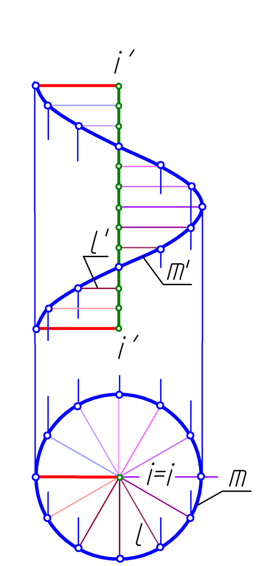
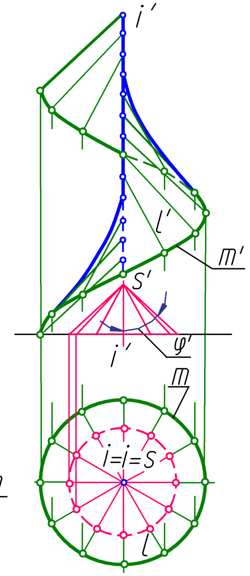


Рис. 5.36 (Fig. 5.36)





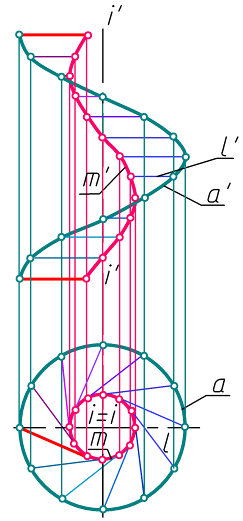


Fig. 5.33 (Рис. 5.33) Fig. 5.34 (Рис. 5.34) Fig. 5.35 (Рис. 5.35)

Fig. 5.34 shows the construction of the oblique helicoid projections. The cylindrical screw line m and the axis *I* are the directinal lines of the helicoid. They are parallel to the corresponding generating lines of the director cone.

3. *A developable helicoid* is produced by motion of the linear generatrix *l* tangential in all its positions to the cylindrical screw line *m*, the last being the helicoid cuspidal edge (Fig. 5.35). The developable helicoid being a ruled surface with a cuspidal edge is considered to be one of the torses.

The surface of a developable helicoid is bounded by the cuspidal edge *m* and the line *a* obtained by intersection of helicoid surface with a surface of coaxial cylinder of a larger diameter (than the diameter of the screw line *m*).

If the generating line *l* intersects the surface axis, the helicoid is referred to as a closed one (Fig. 5.33 and 5.34), if not - as an open one (Fig. 5.35).

5.7 Mutual Intersection of Surfaces

The line of intersection of two surfaces is the locus of the points belonging to both surfaces.

A general method of drawing the points belonging to a curve of mutual intersection of surfaces is the method of auxiliary surfaces-mediators. This method is similar to the method of construction intersection lines of surfaces cut by planes and consists in the following:

Take some intersecting surfaces Φ and Ψ (Fig. 5.36). Introduce an auxiliary plane *Q* intersecting the surfaces along the lines *M* and *N* which yields the points K_1 and K_2 belonging to the intersection curve.

В качестве посредников наиболее часто применяют плоскости или шаровые поверхности – сферы. В зависимости от вида посредников можно выделить следующие основные способы построения линии пересечения двух поверхностей:

а) способ вспомогательных секущих плоскостей;
б) способ вспомогательных сфер.

Как и при построении линии пересечения поверхностей плоскостями, при построении линии взаимного пересечения поверхностей необходимо сначала строить опорные (характерные) точки кривой, так как эти точки дают пределы линии пересечения, между которыми и следует определять промежуточные (случайные) точки.

Способ вспомогательных секущих плоскостей

Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения сферы с конусом вращения (рис. 5.37).

Для построения линии пересечения заданных поверхностей в качестве вспомогательных плоскостей целесообразно использовать фронтальную плоскость *P* и ряд горизонтальных плоскостей (*S, T, R*).

Построение начинаем с определения проекций характерных точек. Проводим фронтальную плоскость $P(P_H)$. Эта плоскость пересекает поверхности по очеркам. Фронтальные проекции высшей и низшей точек (*1′* и *2′*) находим, как точки пересечения очерков. Горизонтальные проекции *1* и *2* определяем, проведя линии связи.

Вспомогательные горизонтальные плоскости пересекают сферу и конус по окружностям.

Проекции *3′* и *4′* точек, лежащих на экваторе сферы, находим с помощью горизонтальной плоскости *T(Tv),* проходящей через центр сферы. Плоскость пересекает сферу по экватору и конус по окружности радиуса *r*, в пересечении горизонтальных проекций которых и находим горизонтальные проекции *3* и *4* . Горизонтальные проекции точек *3* и *4* являются точками границы видимости линии пересечения на этой проекции. Промежуточные точки (точки *5, 6, 7, 8*) находим с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей *S(Sv)* и *R(Rv).* Полученные точки соединим плавной кривой линией с учетом видимости.

Способ вспомогательных сфер

Этот способ широко используется при решении задач на построение линий пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями.

Прежде чем перейти к рассмотрению этого метода, рассмотрим частный случай пересечения поверхностей вращения, у которых оси совпадают, то есть пересечение соосных поверхностей вращения.

As the surfaces-mediators very often planes or ball surfaces (spheres) are used. Depending on mediators the following main methods of construction an intersection line of two surfaces are distinguished:

a) method of auxiliary cutting planes;
b) method of auxiliary spheres.

Like in construction an intersection line of surfaces with planes, to draw a line of mutual intersection of surfaces it is necessary to draw, first, control points of a curve, as these points present the bounds of intersection line, between which the passing (arbitrary) points should be determined.

Method of Auxiliary Cutting Planes

The following example illustrates how to apply the method of auxiliary cutting planes for construction of an intersection line of a sphere with a cone of rotation (Fig. 5.37).

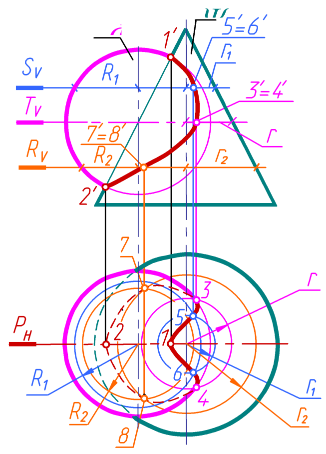


Fig. 5.37 (Рис. 5.37)

To construct an intersection line of the given surfaces it is advisable to introduce the frontal plane *P* and a number of horizontal planes (*S*, *T*, *R*) as the auxiliary surfaces.

Start with determination of the characteristic points projections. Draw the frontal plane $P(P_H)$. This plane intersects the surfaces along the outlines. Find the frontal projections of the highest and the lowest points (*1′* and *2′*) as the points of intersection of the outlines. Pass the connection lines to determine the horizontal projections *1* and *2*.

The auxiliary horizontal planes cut the sphere and the cone in circles.

Find the projections *3′* and *4′* of the points lying on the sphere equator with the help of horizontal plane $T(T_V)$, which passes through the centre of the sphere. The plane intersects the sphere along the equator and the cone in the circle of radius *r*. The horizontal projections intersection of the latest yields the horizontal projections *3* and *4*. The horizontal projections of points *3* and *4* are the points of visibility bounds of the intersection line on this projection. Determine the passing points (*5, 6, 7, 8*) by means of auxiliary horizontal planes $S(S_V)$ and $R(R_V)$. Join the points thus obtained in a smooth curve subject to visibility.

Method of Auxiliary Spheres

This method is widely used for solution of problems on construction the intersection lines of rotation surfaces with intersecting axes.

Before studying this method let us consider a particular case of intersection of rotation surfaces, the axes of which coincide, i.e. a case of intersection of coaxial surfaces of rotation.

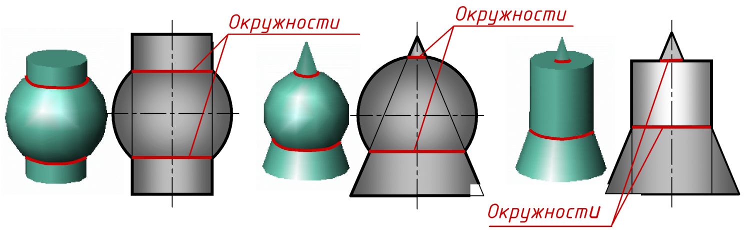


Рис. 5.38 (Fig. 5.38)

Линия пересечения соосных поверхностей – окружность, плоскость которой перпендикулярна оси поверхностей вращения. При этом, если ось поверхностей вращения параллельна плоскости проекций, то линия пересечения на эту плоскость проецируется в отрезок прямой линии (рис. 5.38).

Это свойство используют для построения линии взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер. При этом могут быть использованы концентрические (сферы, построенные из одного центра) и эксцентрические (сферы, проведенные из разных центров) сферы. Рассмотрим применение вспомогательных концентрических сфер – сфер с постоянным центром.

Следует отметить, что если плоскость осей поверхностей вращения не параллельна плоскости проекций, то окружности , по которым пересекаются поверхности, будут проецироваться в эллипсы, а это усложнит решение задачи. Поэтому метод вспомогательных сфер следует применять при следующих условиях:

а) пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;

б) оси этих поверхностей должны пересекаться, точку пересечения принимают за центр вспомогательных сфер;

в) плоскость, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), должна быть параллельна одной из плоскостей проекций.

Используя этот метод, можно построить линию пересечения поверхностей на одной проекции.

Рассмотрим пример построения линии пересечения цилиндра и конуса вращения (рис. 5.39).

Точки *1, 2, 3, 4* определяются как точки пересечения контурных образующих поверхностей, принадлежащие плоскости пересечения осей (плоскости симметрии $P(P_H)$. Остальные точки находим способом вспомогательных сфер.

Из точки пересечения осей данных поверхностей (точки *O*) построим вспомогательную сферу произвольного радиуса. Эта сфера будет одновременно соосна конусу и цилиндру и пересечет их по окружностям, плоскости которых перпендикулярны соответствующим осям вращения. Фронтальные проекции этих окружностей – отрезки прямых.

Coaxial surfaces intersect in a circle, the plane of which is perpendicular to the axis of rotation surfaces. At that, if the axis of rotation surfaces is parallel to the projection plane, the intersection line projects onto this plane as a line-segment (Fig. 5.38).

This property is used for construction a line of mutual intersection of two rotation surfaces by means of auxiliary spheres. Here may be used both, concentric (constructed from one centre) and eccentric (drawn from different centres) spheres. We are going to consider application of auxiliary concentric spheres, those with a constant centre.

Note: if a plane of rotation surface axes is not parallel to the projection plane, the circles in which the surfaces intersect, are projected as ellipses and this make the problem solution more complicated. That is why the method of auxiliary spheres should be used under the following conditions:

a) intersecting surfaces are the surfaces of rotation;

b) axes of the surfaces intersect and the intersection point is taken for the centre of auxiliary spheres;

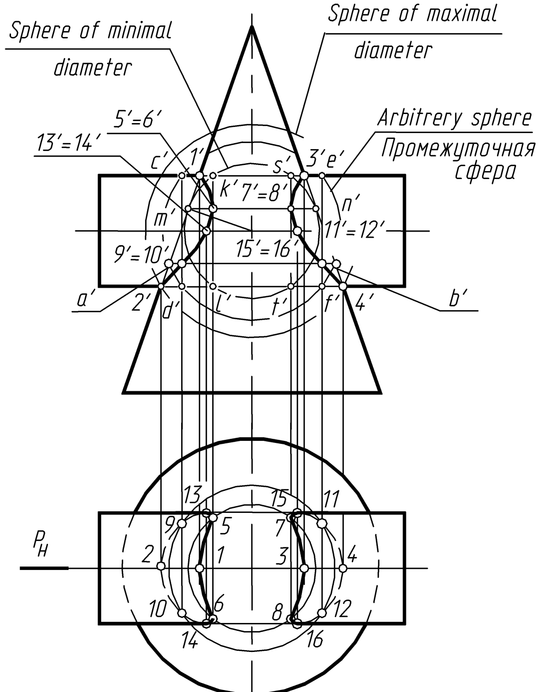


Fig. 5.39 (Рис. 5.39)

c) the plane produced by the surfaces axes (plane of symmetry) is parallel to one of the projection planes.

Using this method it is possible to construct the line of intersection of the surfaces on one projection.

Let us consider an example of drawing an intersection line of a cylinder and a cone of rotation (Fig. 5.39).

The points *1, 2, 3, 4* are determined as the points of level generatrices of the surfaces belonging to the plane of axes intersection (the plane of symmetry $P(P_H)$). Find the other points by method of auxiliary spheres.

From the intersection point of the given surfaces (point *O′*) draw an auxiliary sphere of an arbitrary radius. This sphere is simultaneously coaxial to the cone and the cylinder and cuts them along the circumferences, the planes of which are perpendicular to the corresponding rotation axes. The frontal projections of those circles are line-segments.

Проведенная сфера пересекает конус по окружности диаметра *AB(a′b′),* а цилиндр – по окружностям *CD(c′d′)* и *EF(e′f′).* В пересечении окружности *AB* с окружностями *CD* и *EF* получаем соответственно точки *9-10* и *11-12*, принадлежащие линии пересечения.

Таким образом, можно построить достаточное количество точек искомой линии пересечения. При этом нужно иметь ввиду, что не все сферы могут быть использованы для решения задачи. Рассмотрим предельные границы вспомогательных сфер.

Радиус максимальной секущей сферы будет равен расстоянию от центра *O* до самой удаленной точки пересечения контурных образующих (от точки *o′* до точек *2′* и *4′*). Минимальной секущей сферой должна быть такая сфера, которая касалась бы одной поверхности (большей) и пересекала вторую (меньшую). В данном примере минимальная сфера касается поверхности конуса по окружности *MN(m′n′)* и пересекает цилиндр по окружностям *KL(k′l′)* и *ST(s′t′).* Пересекаясь между собой, окружности *MN* и *KL* дают точки линии пересечения *5(5′)* и *6(6′),* а окружности *MN* и *ST* – точки *7(7′)* и *8(8′).* Это самые глубокие точки линии пересечения.

Для точности решения между максимальной и минимальной сферами необходимо построить дополнительные (промежуточные) сферы:

Rmax > Rпром. >Rmin.

Если дополнительная сфера пересекает только одну данную поверхность, то такая сфера для решения задачи непригодна.

Для построения второй проекции линии пересечения можно использовать окружности, полученные от сечения конуса вспомогательными сферами, или построить дополнительные сечения поверхности. Точки *13-14* и *15-16,* лежащие на контурных образующих цилиндра, являются точками границы видимости линии пересечения на горизонтальной проекции.

Возможные случаи пересечения криволинейных поверхностей

Существуют четыре варианта пересечения двух поверхностей.

1. *Проницание.* Все образующие первой поверхности (цилиндра) пересекаются со второй поверхностью, но не все образующие второй поверхности пересекаются с первой. В этом случае линия пересечения поверхностей распадается на две замкнутые кривые линии (рис. 5.40).
2. *Врезание.* Не все образующие той и другой поверхности пересекаются между собой. В этом случае линия пересечения – одна замкнутая кривая линия (рис. 5.41).

The sphere constructed intersects the cone along the circumference of diameter *AB* (*a′b′*), and the cylinder - along the circumferences *CD* (*c′d′*) and *EF* (*e′f′*). In the intersection points of the circle *AB* with the circles *CD* and *EF* obtain points *9-10* and *11-12* respectively, which belong to the intersection line.

In such a way it is possible to construct a certain amount of points of the desired intersection line. Students should note that not all the spheres may be used for the problem solution. Consider the limits of the auxiliary spheres usage.

The maximal radius of a cutting sphere is equal to the distance from the centre O to the farthest intersection point of the level generatrices (from *O′* to *2′* and *4′*). The minimal cutting sphere is a sphere, which contacts one surface (the larger one) and cuts another (the smaller one). In the example above the minimal sphere contacts the cone surface in the circle *MN* (*m′n′*) and intersects the cylinder along the circumferences *KL* (*k′l′*) and *ST* (*s′t′*). Meeting each other the circles *MN* and *KL* yield the points of intersection line *5*(*5′*) and *6*(*6′*), and the circles *MN* and *ST* yield the points *7*(*7′*) and *8*(*8′*). These are the deepest points of the intersection line.

If an auxiliary sphere cuts only one given surface, this sphere is not proper for the problem solution.

$$R_{max} > R_{pass} > R_{min}$$

To construct the second projection of the intersection line one may use the circles obtained at cutting the cone by auxiliary spheres, or to draw the additional sections of the surface. Points *13-14* and *15-16* lying on the level generatrices of the cylinder, are the points of visibility bounds of the intersection line on the horizontal projection.

Possible Cases of Intersection of Curved Surfaces

There are four variants of two surfaces meeting:

1. *Permeability.* All generating lines of the first surface (cylinder) intersect the other surface, but not all generatrices of the second surface intersect the first one. In this case the intersection line of the surfaces decomposes into two closed curves (Fig. 5.40).
2. *Cutting-in.* Not all generatrices of both surfaces intersect each other. In this case the intersection line is one closed curve (Fig. 5.41)

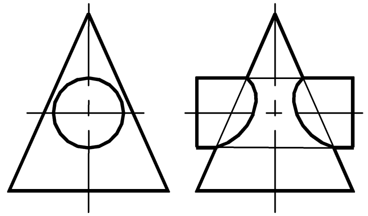


Fig. 5.40 (Рис. 5.40)

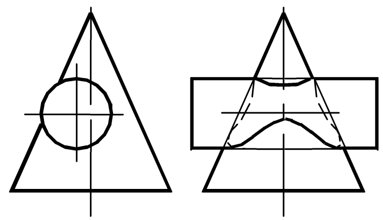


Fig. 5.41 (Рис. 5.41)

3. *Одностороннее касание.* Все образующие одной поверхности пересекаются со второй, но не все образующие второй поверхности пересекаются с первой. Поверхности имеют в одной точке (точка K на рис. 5.42) общую плоскость касания. Линия пересечения распадается на две замкнутые кривые линии, пересекающиеся в точке касания.
4. *Двойное касание.* Все образующие обеих поверхностей пересекаются между собой. Пересекающиеся поверхности имеют две общие касательные плоскости. В этом случае линия пересечения распадается на две плоские кривые, которые пересекаются в точках касания (рис. 5.43).

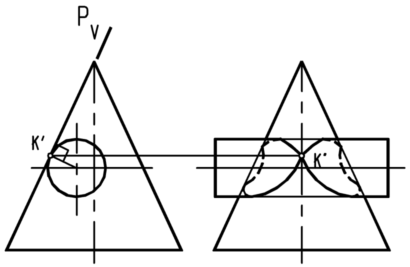


Рис. 5.42 (Fig. 5.42)

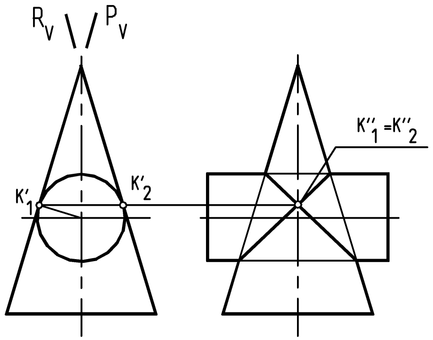


Рис. 5.43 (Fig. 5.43)

Пересечение поверхностей второго порядка

В общем случае две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка. Следует отметить, что при некоторых особых положениях относительно друг друга поверхности второго порядка могут пересекаться по плоским кривым второго порядка, то есть пространственная кривая пересечения распадается на две плоские кривые.

1. *Теорема о двойном касании.* Если две поверхности второго порядка имеют две общие точки, через которые могут быть проведены к ним две общие касательные плоскости, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, причем плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки касания.

На рис. 5.44 показано построение линии пересечения поверхностей прямого кругового цилиндра и эллиптического конуса. Эти поверхности в общих точках K и K_1 имеют общие фронтально проецирующие касательные плоскости *P(Pv)* и *R(Rv).* Линии пересечения – эллипсы – лежат в профильно проецирующих плоскостях S и T, проходящих через прямую KK_1, соединяющие точки касания.

3. *Unilateral contact.* All generating lines of one surface intersect the other surface, but not all generatrices of the second surface intersect the first one. There is a common tangent plane in one point of the surfaces (the point K, Fig. 5.42). The intersection line decomposes into two closed curves meeting in the point of contact.
4. *Bilateral contact.* All generating lines of both surfaces intersect each other. The intersecting surfaces have two common tangent planes. In this case the intersection line decomposes into two plane curves which meet in the points of contact (Fig. 5.43).

Intersection of the Surfaces of the Second Order

Generally two surfaces of the second order intersect along a spatial curve of the forth order. But in some special relative positions the surfaces of the second order may meet along the plane curves of the second order, that is the spatial curve of intersection decomposes into two plane curves.

1. If two surfaces of the second order have two common points through which two common tangent planes may be passed to them, the line of their mutual intersection decomposes into two plane curves of the second order, and the planes of the above curves pass through the straight line connecting the tangent points.

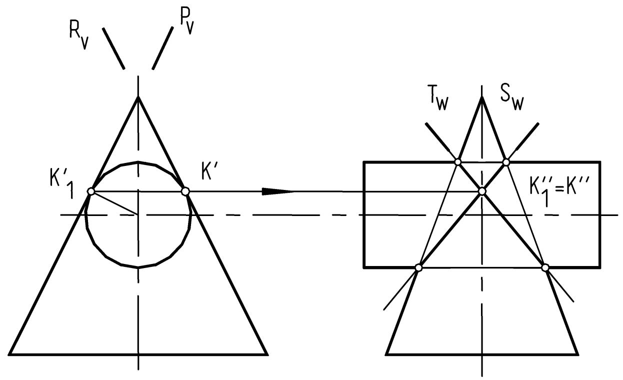


Fig. 5.44 (Рис. 5.44)

Fig. 5.44 shows the construction of the intersection line of the surfaces of a right circular cylinder and an elliptic cone. At the common points K and $K1$ these surfaces have common frontal projecting tangent planes $P(P_V)$ and $R(R_V)$. The lines of intersection (ellipses) lie in the profile projecting planes S and T, passing through the line KK_I which connect the tangent points.

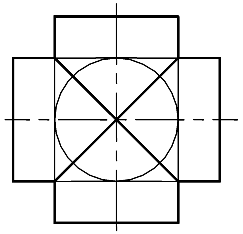


Рис. 5.45 (Fig. 5.45)

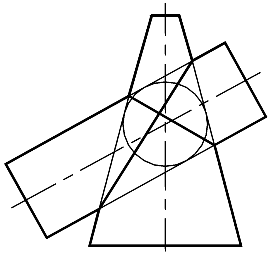


Рис. 5.46 (Fig. 5.46)

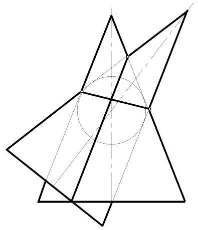


Рис. 5.47 (Fig. 5.47)

2. *Теорема Монжа.* Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые. Плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

На рис. 5.45 – 5.47 приведены примеры построения линий пересечения поверхностей на основании теоремы Монжа, где два цилиндра, цилиндр и конус и два конуса описаны вокруг сферы, а на рис. 5.48 – пример построения линии пересечения двух сжатых эллипсоидов вращения, вписанных в сферу.

Вопросы к главе 5

1. Дайте определение поверхности.
2. Что означает «задать поверхность на чертеже»?
3. Какие поверхности называются линейчатыми?
4. Чем отличаются многогранные поверхности от многогранников?
5. При каком условии точка принадлежит поверхности?
6. Как образуются поверхности вращения?
7. Какие линии на поверхности вращения называют параллелями и меридианами?
8. Как образуются поверхности геликоидов?
9. Какие линии получаются при пересечении цилиндра вращения плоскостями?
10. Какие линии получаются при пересечении конуса вращения плоскостями?
11. Как провести плоскость, чтобы в сечении тора была окружность?
12. В чем заключается общий способ построения линии пересечения поверхностей?
13. В каких случаях для построения линии пересечения поверхностей применяют в качестве посредников проецирующие плоскости, в каких – сферы?
14. Какие точки линии пересечения называют характерными (опорными) точками?
15. Сформулируйте теорему Монжа и приведите примеры практического применения этой теоремы.

2. *Monge theorem*. If two surfaces of the second order may be inscribed into the third one or described around it, the line of their mutual intersection decomposes into two plane curves. The planes of those curves pass through a straight line connecting the intersection points of the tangent lines.

Fig. 5.45, 5.46 and 5.47 present the examples of construction of the surfaces intersection lines on the basis of Monge theorem, where two cylinders, a cylinder and a cone and two cones are described around a sphere.

The Fig. 5.48 illustrates construction of intersection line of two oblate ellipsoids of rotation which inscribed info sphere.

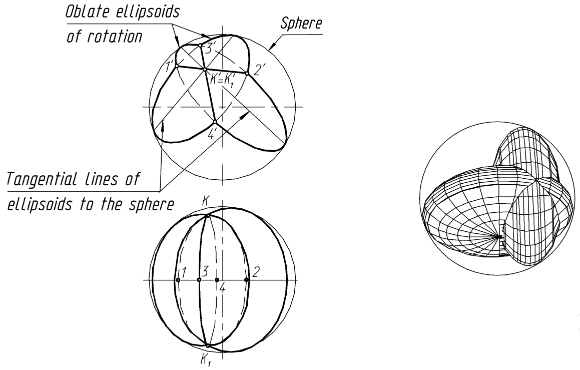


Fig. 5.48 (Рис. 5.48)

Questions to Chapter 5

1. What is “surface”?
2. What is the meaning of the expression “To specify a surface in a drawing”?
3. What surfaces are called “ruled surfaces”?
4. What is the difference between the polyhedral surfaces and polyhedrons?
5. What is the condition of a point belonging to a surface?
6. How do we obtain the surfaces of rotation?
7. What lines on a surface of rotation are referred to as parallels and meridians?
8. How is a surface of helicoid formed?
9. What lines are produced by intersection of a rotation cylinder with the planes?
10. What lines are produced by intersection of a rotation cone with the planes?
11. How to pass a plane to obtain a circle in a torus section?
12. What is the general method of drawing the intersection line of surfaces?
13. In what cases do we use projection planes, spheres as mediators for the construction of intersection lines of surfaces?
14. What points of an intersection line are referred to as control ones?
15. Give the formulation of Monge theorem and introduce the example of its application in practice.