ГЛАВА 3. ТОЧКА И ПРЯМАЯ

Для полного выявления наружных и внутренних форм деталей и их соединений и для решения ряда других задач бывает необходимо три и более изображений. Поэтому вводят три и более плоскости проекций.

Введем в систему плоскостей H и V третью, им перпендикулярную плоскость. Эту плоскость называют профильной плоскостью проекций и обозначают буквой W (рис. 3.1). Плоскость W пересекает плоскость H и V по линиям (осям проекций) y и z. Точку пересечения всех осей называют началом координат и обозначают буквой O (начальная буква латинского слова «*origo*» – начало). Оси x, y, z взаимно перпендикулярны.

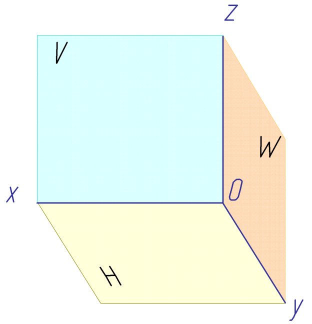


Рис. 3.1 (Fig. 3.1)

Три взаимно-перпендикулярные плоскости делят пространство на восемь частей, восемь октантов (от латинского слова «*octo*» – восемь).

В нашей стране, как и в большинстве европейских стран, принята правая, так называемая европейская система расположения проекций. Ось x направлена от начала координат влево, y – вперед (к нам), z – вверх. Обратные направления координатных осей считаются отрицательными.

3.1. Чертеж точки

Прямоугольные проекции точки A на плоскостях проекций H, V и W получаются как основания перпендикуляров, опущенных из данной точки на каждую из плоскостей проекций:

a – горизонтальная;
a' – фронтальная;
a'' – профильная.

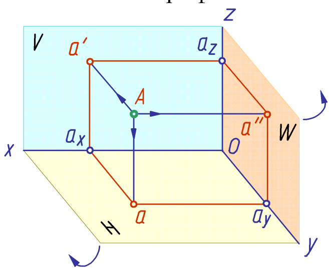


Рис. 3.3 (Fig. 3.3)

Рассмотренное наглядное изображение точки в системе плоскостей H, V и W (рис. 3.3) для целей черчения неудобно ввиду сложности. Преобразуем его так, чтобы горизонтальная и профильная плоскости проекций совпали с фронтальной плоскостью проекций, образуя одну плоскость чертежа (рис. 3.4).

Это преобразование осуществляют путем поворота вокруг оси x плоскости H на угол 90° вниз и плоскости W на угол 90° вправо вокруг оси z. В результате указанного совмещения плоскостей получаем чертеж, известный под названием эпюр Монжа («*epure*» (франц.) – чертеж, проект).

CHAPTER 3. THE POINT AND THE STRAIGHT LINE

To obtain a clear understanding of the all external and internal forms of the components and their joints as well as to be capable of solving other problems, it is usually necessary to have three or more views of each detail. That is why there can be three or more projection planes.

Into the system of the planes H and V, let us introduce one more plane, perpendicular to them. This plane is called the profile projection plane and is denoted by letter W (Fig. 3.1). The plane W intersects the planes H and V along the lines y and z (axes of projection). The intersection point of all axes is called origin of co-ordinates and is designated by letter O (the first letter of the Latin word «*origo*» which means «*origin*»). The axes x, y, z are mutually perpendicular.

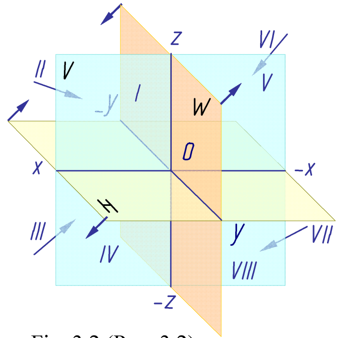


Fig. 3.2 (Рис. 3.2)

The three mutually perpendicular planes divide space into eight parts, eight octants, Fig. 3.2 (from Latin «*octo*» – «eight»). Most of the Continental countries adopted the right-handed system, the so-called "European system of projection positioning". The axis x is directed to the left from the origin of co-ordinates, y – forward (to us), z - upward. The opposite directions of the co-ordinate axes are considered negative.

3.1. The Point Drawing

Rectangular projections of a point (in the H, V and W planes) are always obtained as the bases of perpendiculars, dropped from the given point onto each of projection planes:

a – horizontal;
a' – frontal;
a'' – profile.

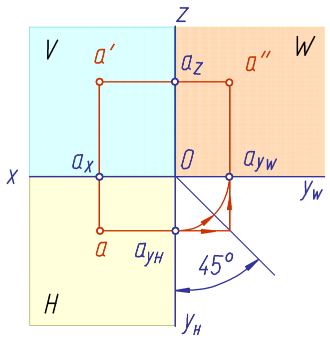


Fig. 3.4 (Рис. 3.4)

Representation of a point in the system of the planes H, V and W shown in Fig. 3.3, is too complex and, therefore, is inconvenient for drawing. Let us convert it so that the horizontal and profile planes will coincide with the frontal projection plane, forming one drawing plane (Fig. 3.4).

Such a conversion can be realized by the rotation of the plane H around the axis x down at the angle of 90°, and of the plane W to the right around the axis z, at the angle of 90°. As a result of the above coincidence obtain the drawing known as «epure of Monge» or "orthographic drawing of Monge" (from French "*epure*" – drawing, projection).

Перейдя к эпюру, мы утратили пространственную картину расположения плоскостей проекций и точки. Но эпюр обеспечивает точность и удобоизмеримость изображений при значительной простоте построений.

В дальнейшем эпюр Монжа, а также проекционные чертежи, в основе которых лежит метод Монжа, будем называть одним словом – чертеж (или комплексный чертеж).

Горизонтальная и фронтальная проекции точки (a и a') расположены на одном перпендикуляре к оси x – на линии связи aa', фронтальная и профильная проекция (a' и a'') – на одном перпендикуляре к оси z – на линии связи $a'a''$.

Построение профильной проекции точки по ее фронтальной и горизонтальной проекциям показано на рис. 3.4. При построении можно воспользоваться или дугой окружности, проводимой из точки O, или биссектрисой угла $y_H O y_W$. Первый из указанных способов предпочтителен как более точный.

Таким образом, на комплексном чертеже, состоящем из трех ортогональных проекций точки:

две проекции находятся на одной линии связи;
линии связи перпендикулярны осям проекций;
две проекции точки определяют положение ее третьей проекции;
две проекции точки определяют положение точки в пространстве.

Положение точки в пространстве задается при помощи трех ее координат (абсциссы x, ординаты y и аппликаты z), то есть трех чисел, выражающих расстояние от этой точки до координатных плоскостей проекций. Запись координат точки производят в такой форме: $A\ (x,\ y,\ z)$.

По отношению к плоскостям проекций точка может занимать как общее (точка A), так и частные (точки B и C) положения (рис. 3.5). У точки, лежащей в плоскости проекций, две ее проекции лежат на осях проекций (точка B). У такой точки одна ее координата равна нулю. Точка, принадлежащая одновременно двум плоскостям проекций (точка C), лежит на оси проекций. Две ее проекции совпадают, а третья совпадает с точкой O – началом координат. В этом случае нулю равны две ее координаты. Точка, принадлежащая трем плоскостям проекций, расположена в начале координат.

Таким образом, величины отрезков линий связи на чертеже определяют численное расстояние проецируемой точки до плоскости проекций. Отрезок $a_x a$ указывает, на каком расстоянии (глубине) расположена точка от фронтальной плоскости проекций, отрезок $a_x a'$ – расстояние (высоту) от точки до горизонтальной плоскости проекций и отрезок $a'a_z$ – расстояние от точки до профильной плоскости проекций (рис. 3.4).

Having used the orthographic drawing we have lost the spatial picture of the projection planes and point positioning. But epure ensures representational precision and convenience of dimensioning, at a considerable simplicity of drawing.

For simplicity, epure of Monge as well as projection drawings based on the method of Monge are called drawings (or complex drawings) in this book.

Horizontal and frontal projections of a point (a and a') are situated on one perpendicular to the x-axis - on the connection line aa'; frontal and profile projections (a' and a'') are situated on one perpendicular to the z-axis - on the connection line $a'a''$.

Construction of a profile point projection, given its frontal and horizontal projections, is shown in Fig. 3.4. For the construction one may use either a circular arc passed from the point O, or bisectrix of the angle $y_H O y_W$. The first of the methods is more preferable as it is more precise.

Thus, in a complex drawing consisting of three orthogonal point projections:
two projections are situated on one connection line;
connection lines are perpendicular to the projection axes;
two projections of a point specify the locus of its third projection;
two projections of a point specify its locus in space.

The location of a point in space is specified by means of its three co-ordinates (abscissa x, ordinate y, applicate z), i.e. of three figures showing the distance from this point to the co-ordinate projection planes. Recording of the point co-ordinates is made in the following form: $A(x,y,z)$.

In regards to the projection planes a point may have a general (the point A) or particular (the points B and C) position (Fig. 3.5). If a point is located in a projection plane, its two projections lie on the projection axes (the point B). One of the co-ordinates of such a point is equal to zero. A point belonging to two projection planes simultaneously (the point C) lies on a projection axis. Its two projections coincide, the third one merges with the point O, origin of co-ordinates. In this case two of its co-ordinates are equal to zero. A point belonging to three projection planes is situated in the origin of co-ordinates.

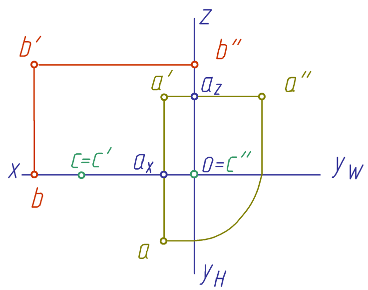


Fig. 3.5 (Рис. 3.5)

Therefore, the sizes of the connection lines segments in a drawing specify the numerical distance from a projection point to a projection plane. The segment $a_x a$ shows the distance (depth) from the point to the frontal projection plane, the segment $a_x a'$ - the distance (height) from the point to the horizontal projection plane, and the segment $a'a_2$ - the distance to the profile projection plane.

3.2. Взаимное положение двух точек.

Условия видимости на чертеже

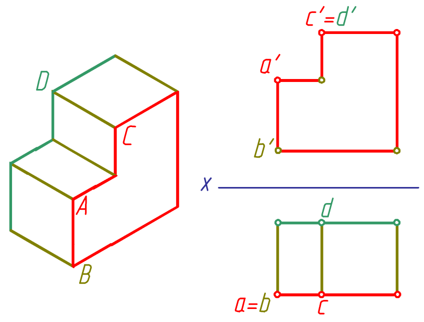


Рис. 3.6 (Fig. 3.6)

Рассмотрим чертеж модели, изображенной на рис. 3.6. Проекции некоторых точек совпадают, так как они расположены на одной проецирующей прямой. Например, на горизонтальной плоскости слились в одну точку a и b проекции вершин A и B – они лежат на одной горизонтально-проецирующей прямой. На фронтальной плоскости совпали проекции c' и d' вершин C и D – они лежат на одной фронтально-проецирующей прямой.

Точки, лежащие на одной проецирующей прямой, называют *конкурирующими*. A и B – горизонтально-конкурирующие точки, а C и D – фронтально-конкурирующие точки и т.д.

Ясно, что если две точки лежат на одной проецирующей прямой, то одна из них закрывает другую. Как определить, какая из них будет видимая и какая невидимая?

Из двух горизонтально-конкурирующих точек на горизонтальной плоскости видима та, которая расположена в пространстве выше.

Анализируя положение фронтальных проекций точек (рис. 3.7), определяем, что точка A имеет большую координату z, чем точка B. Следовательно, точка A расположена выше точки B и при проецировании на горизонтальную плоскость проекций закроет точку B. Точка A на горизонтальной плоскости видима, точка B – невидима. На фронтальной плоскости они обе видимы.

Из двух фронтально-конкурирующих точек на фронтальной плоскости проекций будет видима та, которая расположена ближе к наблюдателю, стоящему лицом к фронтальной плоскости проекций (рис. 3.8).

Какая из них ближе к наблюдателю, можно определить по горизонтальным проекциям. Например, сравнивая горизонтальные проекции точек D и C , заключаем, что на фронтальной плоскости проекций видима точка C, а точка D – невидима, т.к. $y_C > y_D$.

Итак, если на чертеже одноименные проекции точек не совпадают или совпадает только одна пара проекций, то такие точки в пространстве не совпадают, а удалены друг от друга на определенное расстояние (рис. 3.7, 3.8).

3.2 Mutual Positions of Two Points.

Terms of Visibility in a Drawing

Consider a model drawing shown in Fig. 3.6. Projections of some points coincide as they are situated on one projecting line. For example, images a and b of the vertices A and B on the horizontal projection merged into one point as they lie on one horizontal projecting line. On the frontal projection representations c and d of the vertices C and D merged into one point as they lie on one frontal projecting line.

The points lying on one projecting line are called competitive points. A and B are horizontal competitive points, C and D - frontal competitive points, etc.

It is obvious that if two points were situated on one projecting line, one of them covers the other. How to determine which of them is visible and which is invisible one?

Of two horizontal competitive points in the horizontal plane that one is visible which is situated higher in space.

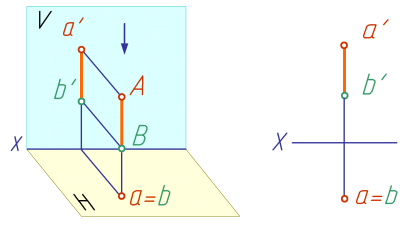


Fig. 3.7 (Рис. 3.7)

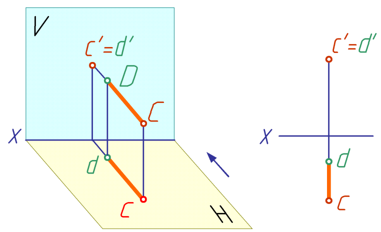


Fig. 3.8 (Рис. 3.8)

The frontal projection (Fig. 3.7) shows that the z-co-ordinate of the point A is bigger than that of the point B. Hence, the point A is located higher than B and being projected onto the horizontal projection plane it covers the point B. On the horizontal projection A is visible, B - invisible. On the frontal one both of the points are visible. Of two frontal competitive points in the frontal plane that one is visible which is situated closer to a viewer facing the frontal projection plane (Fig. 3.8).

The horizontal projection helps to determine which of the points is located closer to the viewer. For example, comparing the horizontal projections of the points D and C one can conclude that the point C is visible on the plane V, and D - is invisible.

Likewise determine the visible point of two profile competitive ones in the projection plane W - that one is visible which is situated closer to the left side.

So, when projections of the like points in a drawing do not coincide, or only one projection pair coincides, these points do not coincide in space and are located a certain distance from each other.

3.3. Чертеж отрезка прямой. Прямые частного положения

Наглядное изображение отрезка *AB* прямой и его ортогональное проецирование на плоскость *P* показано на рис. 3.9. Рассмотрим ортогональное проецирование отрезка *AB* с учетом свойств параллельного проецирования. Проецирующие прямые *Aa* и *Bb,* проведенные из точек *A* и *B* прямой, образуют проецирующую плоскость *Q*. Линия пересечения плоскостей *Q* и *P* проходит через проекции *a* и *b* точек *A* и *B* на плоскости проекций *P*. Эта линия и является единственной проекцией прямой *AB* на плоскости проекций *P*.

Наглядное изображение проецирования отрезка *AB* прямой на две плоскости проекций в системе *H, V* показано на рис. 3.10, чертеж – на рис. 3.11.

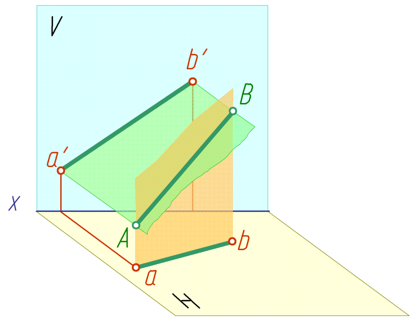


Рис. 3.10 (Fig. 3.10)

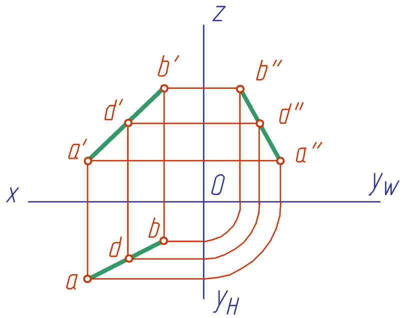


Рис. 3.11 (Fig. 3.11)

Если какая-либо точка принадлежит прямой, то ее проекция принадлежит проекции прямой. Например, точка *D* (рис. 3.9) принадлежит прямой *AB*, ее проекции – проекциям прямой, рис. 3.11.

Относительно плоскостей проекции прямая может занимать различные положения:

– не параллельное ни одной из плоскостей проекций *H, V, W;*

– параллельное одной из плоскостей проекций (прямая может и принадлежать этой плоскости);

– параллельное двум плоскостям проекций, то есть перпендикулярное третьей.

Прямую, не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют прямой общего положения (рис. 3.9 – 3.11). Прямую, параллельную одной из плоскостей проекций или двум плоскостям проекций (то есть перпендикулярную третьей), называют прямой частного положения.

На рис. 3.12 – 3.14 приведены наглядные изображения и чертежи прямых частного положения – прямых, параллельных плоскостям проекций. Такие прямые называют прямыми уровня.

3.3 Drawing of a Line-Segment. Straight Lines of a Particular Position

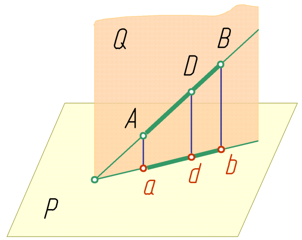


Fig.3.9 (Рис. 3.9)

Fig. 3.9 presents the line-segment *AB* and its orthogonal projecting onto the plane *P*. Let us consider orthogonal projecting of the segment AB subject to the properties of parallel projection. The projecting lines *Aa* and *Bb* passed from the points *A* and *B* produce the projecting plane *Q*. The cutting line of the planes *Q* and *P* passes through the projections *a* and *b* of the points *A* and *B* on the projection plane *P*. This very line is the only projection of the above line in the projection plane *P*. Fig. 3.10 presents a visual picture of the segment *AB* projecting onto two projection planes in the system *H*, *V*, Fig. 3.11 presents a drawing.

If a point belongs to a line, its projection belongs to the line projection. For example, the point *D* (Fig. 3.9) belongs to the line *AB*, so, its projections belong to the line projections (Fig. 3.11).

A line can have different positions relative to the projection planes:

- parallel to neither of the projection planes *H*, *V*, *W*;
- parallel to one of the projection planes (the line may as well belong to this plane);
- parallel to two of the projection planes, that is, perpendicular to the third one.

A line parallel to neither of the projection planes is referred to as the line of general position (Fig. 3.9 through 3.11).

A line parallel to one of the projection planes or to two (that is, perpendicular to the third one) is referred to as the line of a particular position.

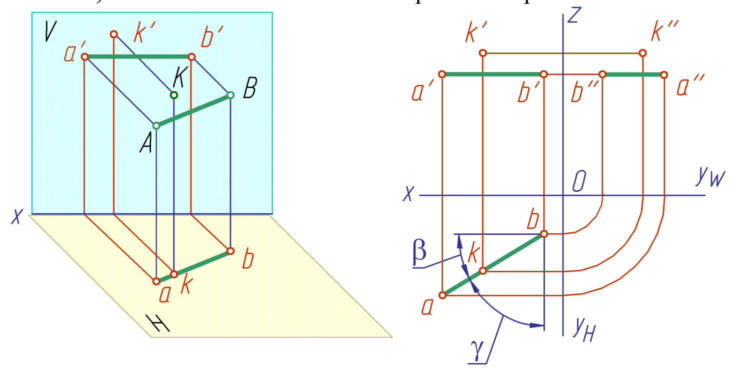


Fig. 3.12 (Рис. 3.12)

Fig.3.12-3.14 show the visual pictures and drawings of the lines of a particular position - the lines parallel to the projection planes. Such lines are called level lines.

а) Прямая AB параллельна плоскости H, ее называют горизонтальной прямой, (рис. 3.12).

Фронтальная проекция прямой $a'b'$ параллельна оси x; профильная проекция $a''b''$ параллельна оси y_W**;** длина горизонтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка $ab=AB$**;** угол β, образованный горизонтальной проекцией и осью проекции x**,** равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол γ**,** образованный горизонтальной проекцией и осью проекции y_H, равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций.

$$|ab| = |AB|; \quad (a'b') \parallel (Ox); \quad (a''b'') \parallel (Oy_w);$$
$$(AB\hat{\ }V) = (ab\hat{\ }Ox) = \beta; \quad (AB\hat{\ }W) = (ab\hat{\ }Oy_н) = \gamma.$$

б) Прямая CD параллельна плоскости V – фронтальная прямая, (рис. 3.13).

Горизонтальная проекция прямой cd параллельна оси x; профильная проекция $c''d''$ параллельна оси z; длина фронтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка $c'd'=CD$**;** угол α**,** образованный фронтальной проекцией и осью проекций x**,** равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций; угол γ**,** образованный фронтальной проекцией и осью z, равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций.

$$|c'd'| = |CD|; \quad (cd) \parallel (Ox); \quad (c''d'') \parallel (Oz);$$
$$(CD\hat{\ }H) = (c'd'\hat{\ }Ox) = \alpha; \quad (CD\hat{\ }W) = (c''d''\hat{\ }Oz) = \gamma.$$

в) Прямая EF параллельна плоскости W – профильная прямая, (рис. 3.14).

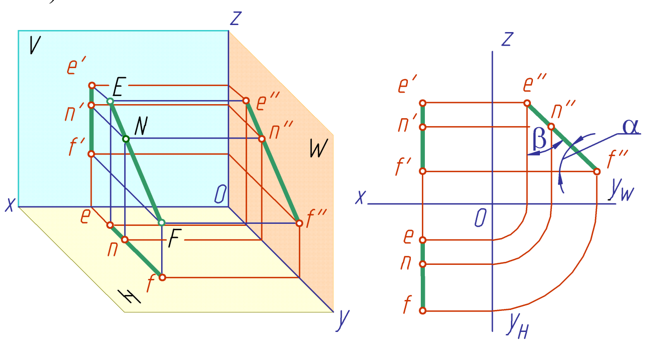


Рис. 3.14 (Fig. 3.14)

Горизонтальная проекция прямой ef параллельна оси y_H; фронтальная проекция $e'f'$ параллельна оси z; длина профильной проекции отрезка равна длине самого отрезка $e''f''=EF$, углы α и β, образованные профильной проекцией с осями y_W и z, равны углам наклона прямой к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно.

$$|e''f''| = |EF|; \quad (ef) \parallel (Oy_н); \quad (e'f') = (Oz);$$

$$(EF\hat{\ }H) = (e''f''\hat{\ }Oy_w) = \alpha; \quad (EF\hat{\ }V) = (e''f''\hat{\ }Oz) = \beta.$$

a) The line AB is parallel to the plane H (it is called a horizontal line).

The frontal projection $a'b'$ of the line is parallel to the axis; the profile projection $a''b''$ is parallel to the axis y_w; the length of the segment horizontal projection is equal to the length of the segment proper $ab=AB$; the angle β, contained by the horizontal projection and projection axis x, is equal to the inclination angle of the line to the frontal projection plane; the angle γ, contained by the horizontal projection and the axis $y_н$, is equal to the inclination angle of the line to the profile projection plane.

$$|ab| = |AB|; \quad (a'b') \parallel (Ox); \quad (a''b'') \parallel (Oy_w);$$
$$(AB\hat{\ }V) = (ab\hat{\ }Ox) = \beta; \quad (AB\hat{\ }W) = (ab\hat{\ }Oy_н) = \gamma.$$

b) The line CD is parallel to the plane V (it is a frontal line) - Fig.3.13

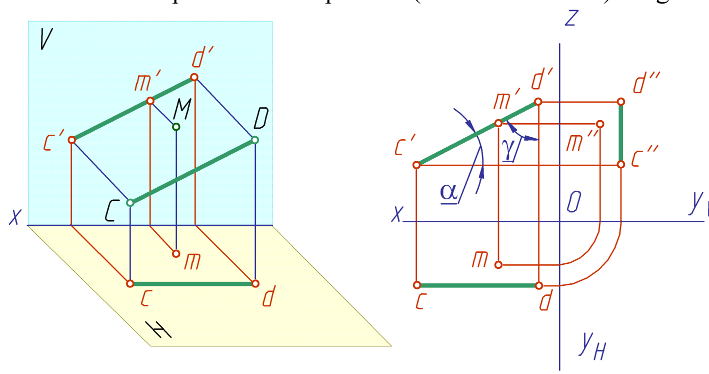


Fig. 3.13 (Рис. 3.13)

The horizontal projection cd of the line is parallel to the axis x; the profile projection $c''d''$ is parallel to the axis z; the length of the segment frontal projection is equal to the length of the segment proper $c'd'=CD$; the angle α, contained by the frontal projection and projection axis x, is equal to the inclination angle of the line to the horizontal projection plane; the angle γ, contained by the frontal projection and the axis z, is equal to the inclination angle of the line to the profile projection plane.

$$|c'd'| = |CD|; \quad (cd) \parallel (Ox); \quad (c''d'') \parallel (Oz);$$
$$(CD\hat{\ }H) = (c'd'\hat{\ }Ox) = \alpha; \quad (CD\hat{\ }W) = (c''d''\hat{\ }Oz) = \gamma.$$

c) The line EF is parallel to the plane W (it is a profile line).

The horizontal projection ef of the line is parallel to the axis $y_н$; the frontal projection $e'f'$ is parallel to the axis z; the length of the segment profile projection is equal to the length of the segment proper $e''f''=EF$; the angles α and β, contained by the profile projection and projection axes y_w and z, is equal to the inclination angles of the line to the horizontal and frontal projection planes respectively.

$$|e''f''| = |EF|; \quad (ef) \parallel (Oy_н); \quad (e'f') = (Oz);$$

$(EF \wedge H) = (e''f'' \wedge Oy_w) = \alpha$; $(EF \wedge V) = (e''f'' \wedge Oz) = \beta$.

Следовательно, каждая линия уровня проецируется в истинную величину на ту плоскость проекций, которой она параллельна. На ту же плоскость проекций проецируются без искажения и углы, которые эта прямая образует с остальными двумя плоскостями проекций.

На рис. 3.15 приведены чертежи прямых, перпендикулярных плоскостям проекций. Такие прямые называются проецирующими прямыми.

а) Прямая AB перпендикулярна плоскости H (горизонтально-проецирующая прямая), ее проекция $a'b'$ перпендикулярна оси x, проекция $a''b''$ перпендикулярна оси y_w, проекции a и b совпадают.
$(AB) \perp H$; $(AB) \parallel V$; $(AB) \parallel W$;
ab – точка; $|a'b'| = |a''b''| = |AB|$; $(a'b') \perp (Ox)$; $(a''b'') \perp (Oy_w)$.

б) Прямая CD перпендикулярна плоскости V (фронтально-проецирующая прямая), ее проекция cd перпендикулярна оси x, проекция $c''d''$ перпендикулярна оси z, проекции c' и d' совпадают.
$(CD) \perp V$; $(CD) \parallel H$; $(CD) \parallel W$;
$c'd'$ – точка; $|cd| = |c''d''| = |CD|$; $(cd) \perp (Ox)$; $(c''d'') \perp (Oz)$.

в) Прямая EF перпендикулярна плоскости W (профильно-проецирующая прямая), ее проекция ef перпендикулярна оси y_H, проекция $e'f'$ перпендикулярна оси z, проекции e'' и f'' совпадают.
$(EF) \perp W$; $(EF) \parallel H$; $(EF) \parallel V$;
$e''f''$ – точка; $|ef| = |e'f'| = |EF|$; $(ef) \perp (Oy_H)$; $(e'f') \perp (Oz)$.

Из чертежа видно, что проецирующая прямая является вместе с тем и прямой двойного уровня, так как она параллельна одновременно двум другим плоскостям проекций.

Следовательно, на две плоскости проекций проецирующие прямые проецируются без искажения, то есть в натуральную величину, а на третью – в точку.

3.4. Взаимное положение точки и прямой

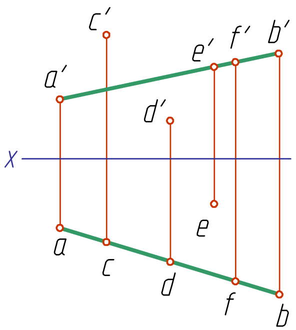


Рис. 3.16 (Fig. 3.16)

Точка и прямая в пространстве могут быть различно расположены относительно друг друга и плоскости проекций.

Если точка в пространстве принадлежит прямой, то ее проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой.

На рис. 3.12 – 3.14 это положение проиллюстрировано на наглядных изображениях и чертежах прямых линий и точек.

Рассмотрим еще раз это положение на плоскостном чертеже (рис. 3.16).

Thus, each level line projects in true size onto that projection plane to which it is parallel. The angles contained by this line and two other planes, also project on the above plane in true size.

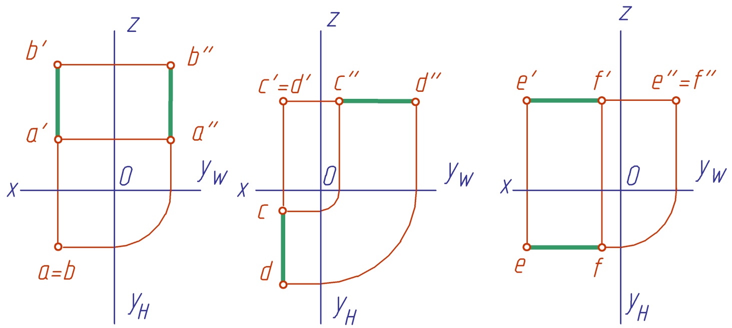


Fig. 3.15 (Рис. 3.15)

Fig. 3.15 shows drawings of the straight lines perpendicular to the projection planes. These lines are called projecting lines.

a) The line AB is perpendicular to the plane H (horizontal projecting line), its projection $a'b'$ is perpendicular to the axis x, projection $a''b''$ is perpendicular to the axis y, projections a and b coincide.
$(AB) \perp H$; $(AB) \parallel V$; $(AB) \parallel W$;
ab – point; $|a'b'| = |a''b''| = |AB|$; $(a'b') \perp (Ox)$; $(a''b'') \perp (Oy_w)$.

b) The line CD is perpendicular to the plane V (frontal projecting line), its projection cd is perpendicular to the axis x, projection $c''d''$ is perpendicular to the axis z, projections c' and d' coincide.
$(CD) \perp V$; $(CD) \parallel H$; $(CD) \parallel W$;
$c'd'$ – point; $|cd| = |c''d''| = |CD|$; $(cd) \perp (Ox)$; $(c''d'') \perp (Oz)$.

c) The line EF is perpendicular to the plane W (profile projecting line), its projection ef is perpendicular to the axis y_H, projection $e'f'$ is perpendicular to the axis z, projections e'' and f'' coincide.
$(EF) \perp W$; $(EF) \parallel H$; $(EF) \parallel V$;
$e''f''$ – point; $|ef| = |e'f'| = |EF|$; $(ef) \perp (Oy_H)$; $(e'f') \perp (Oz)$.

The drawing proves that the projecting line is also a level line as it is parallel at the same time to two other projection planes.

3.4 Mutual Positions of a Point and a Line

A point and a line in space may have different positions relative to each other and to a projection plane.

If a point in space belongs to a line, its projections belong to the corresponding projections of the line.

Fig. 3.12 through 3.14 illustrate the above statement.
Let us examine it again in a plane drawing (Fig. 3.16).

Точка F принадлежит прямой AB, так как горизонтальная проекция f точки принадлежит горизонтальной проекции ab прямой, а фронтальная проекция f' точки принадлежит фронтальной проекции $a'b'$ прямой.

$$(\cdot)\ F \in (AB) \Rightarrow (f \in ab) \wedge (f' \in a'b').$$

Точка C лежит над прямой AB, точка D лежит под прямой AB, точка E лежит за прямой AB.

$$(\cdot)\ C \notin (AB) \Rightarrow (c \in ab) \wedge (c' \notin a'b');$$
$$(\cdot)\ D \notin (AB) \Rightarrow (d \in ab) \wedge (d' \notin a'b');$$
$$(\cdot)\ E \notin (AB) \Rightarrow (e \notin ab) \wedge (e' \in a'b').$$

3.5. Следы прямой

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называются следами прямой. На рис. 3.17 точка M – горизонтальный след прямой, точка N – фронтальный.

Горизонтальная проекция m горизонтального следа совпадает с самим следом – точкой M (рис. 3.17, а), а фронтальная проекция этого следа m' лежит на оси x**.** Фронтальная проекция n' фронтального следа прямой совпадает с фронтальным следом – точкой N, а горизонтальная проекция n лежит на той же оси проекций.

Чтобы построить на плоскостном чертеже горизонтальный след прямой (точки m и m'), надо (рис. 3.17, б) продолжить фронтальную проекцию $a'b'$ прямой до пересечения с осью x (точка m'**)** и через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением горизонтальной проекции ab. Точка m – горизонтальная проекция горизонтального следа.

Для построения фронтального следа (точек n и n') необходимо продолжить горизонтальную проекцию ab прямой до пересечения с осью x (точка n) , через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением фронтальной проекции $a'b'$. Точка n' – фронтальная проекция фронтального следа.

Прямая может пересекать и профильную плоскость проекций, то есть иметь профильный след. Этот след на профильной плоскости проекций совпадает со своей проекцией, а фронтальная и горизонтальная проекции его лежат соответственно на осях z и y.

So, projecting lines are projected on two projection planes in true shape, i.e. in true size, and on the third plane they are projected as a point.
The point F belongs to the line AB as the horizontal projection f of the point belongs to the line horizontal projection ab, and the point frontal projection f' belongs to the line frontal projection $a'b'$.

$$(\cdot)\ \mathrm{F} \in (\mathrm{AB}) \Rightarrow (\mathrm{f} \in \mathrm{ab}) \wedge (\mathrm{f}' \in \mathrm{a}'\mathrm{b}').$$

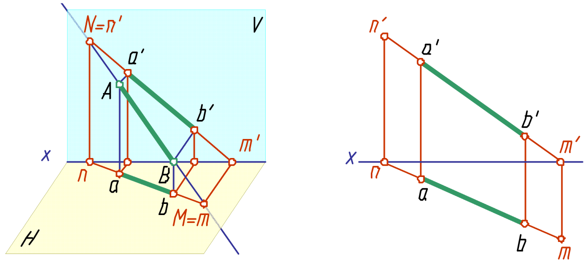
The point C is located above the line AB, the point D is situated under the line AB, the point E lies behind the line AB.

$$(\cdot)\ C \notin (AB) \Rightarrow (c \in ab) \wedge (c' \notin a'b');$$
$$(\cdot)\ D \notin (AB) \Rightarrow (d \in ab) \wedge (d' \notin a'b');$$
$$(\cdot)\ \mathrm{E} \notin (\mathrm{AB}) \Rightarrow (\mathrm{e} \notin \mathrm{ab}) \wedge (\mathrm{e}' \in \mathrm{a}'\mathrm{b}').$$

3.5. Traces of a Line

The trace of a line is the point at which the line intersects a projection plane. The point M (Fig. 3.17) is a horizontal trace of the line, the point N - a vertical (frontal) one.

The horizontal projection m of the horizontal trace coincides with the trace proper - the point M (Fig. 3.17, a); the frontal projection m' of the trace lies on the axis x. The frontal projection n' of the line vertical trace coincides with the vertical trace - the point N; the horizontal projection n lies on the same projection axis.



a b

Fig. 3.17 (Рис. 3.17)

To construct the horizontal trace of a line (points m and m') in a plane drawing proceed as follows (Fig. 3.17, b): prolong the vertical projection $a'b'$ of the line to intersect the x-axis at the point m'. At this point erect a perpendicular to the coordinate axis to intersect the prolongation of the horizontal projection ab. The point m thus obtained is the horizontal projection of the horizontal trace.

The vertical trace of a line (points n and n') is found in much the same manner: prolong the horizontal projection ab of the line to intersect the x-axis at the point n. At this point erect the perpendicular to the x-axis to intersect the prolongation of the frontal projection $a'b'$. The point n' is the frontal projection of the vertical trace.

A line may intersect the profile projection plane as well, it means there may be the profile trace, too. This trace on the profile plane merges with its projection, where as, its frontal and horizontal projections lie on the axes z and y, accordingly.

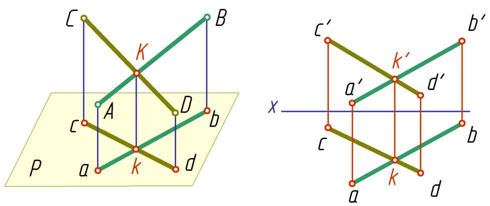
3.6. Взаимное положение двух прямых

Прямые в пространстве могут занимать различные взаимные положения:

– пересекаться, то есть иметь одну общую точку;
– быть параллельными, если точка пересечения прямых удалена в бесконечность;
– скрещиваться, то есть не иметь общих точек.

Пересекающиеся прямые. Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой и точки пересечения проекций лежат на одной линии связи.

Наглядное изображение двух прямых *AB* и *CD*, пересекающихся в точке *K*, приведено на рис. 3.18, а; их чертеж в системе плоскостей *H* и *V* - на рис. 3.18, б.



а б

Рис. 3.18 (Fig. 3.18)

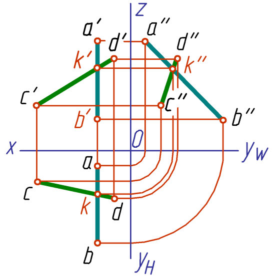


Рис. 3.19 (Fig. 3.19)

Если в системе плоскостей *H, V* одна из прямых профильная, то чтобы ответить на вопрос, пересекаются ли прямые, следует построить их профильные проекции.

На рис. 3.19 все проекции точки *K (k, k′, k″)* одновременно принадлежат прямой *AB* и прямой *CD*, то есть прямые *AB* и *CD* пересекаются.

На рис. 3.20 профильная проекция *k″* точки *K* принадлежит профильной проекции *c″d″* и не принадлежит профильной проекции *a″b″*, следовательно, прямые *AB* и *CD* не пересекаются, они скрещиваются.

Параллельные прямые. Если прямые в пространстве параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой. Действительно, на рис. 3.21 проецирующие плоскости *Q* и *R*, проведенные через параллельные прямые *AB* и *CD*, параллельны между собой. С плоскостью проекций *P* они пересекаются по параллельным прямым *ab* и *cd* – проекциям прямых *AB* и *CD*. Чертеж двух параллельных прямых общего положения приведен на рис. 3.22, чертежи параллельных прямых частного положения – на рис. 3.23:

а) горизонтальных прямых;
б) фронтальных прямых;
в) профильных прямых.

3.6.The Relative Positions of Two Straight Lines

Straight lines in space may have different relative positions:

- to intersect, that is to have one common point;
- to be parallel if their intersection point is at infinity;
- to cross, that is to have no common points.

Intersecting lines. If the lines intersect, their like projections intersect and the points of intersection lie on one connection line.

Fig. 3.18, a presents the visual picture of two lines *AB* and *CD*, intersecting at the point *K*; Fig. 3.18, b - the drawing in the system of *H* and *V* planes.

If one of the lines in the *H* and *V* planes system is a profile line, to find out where the lines intersect, construct their profile projections.

Fig. 3.19 - all projections of the point *K* (*k, k′, k″*) belong to the lines *AB* and *CD* simultaneously, it means that the lines *AB* and *CD* intersect.

Fig. 3.20 - the profile projection *k″* of the point *K* (the *CD* line) does not belong to the profile projection *a″b″*, hence, the lines *AB* and *CD* do not intersect.

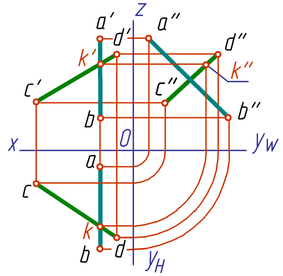


Fig. 3.20 (Рис. 3.20)

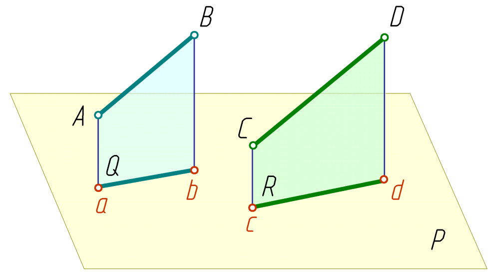


Fig. 3.21 (Рис. 3.21)

Parallel lines. If the lines in space are parallel, their like projections are also parallel. Fig. 3.21 - the projecting planes *Q* and *R*, passed through the parallel lines *AB* and *CD*, are also parallel. They intersect the plane *P* with the parallel lines *ab* and *cd*, which are the projections of *AB* and *CD* lines. A drawing of two parallel lines of general position is shown in Fig. 3.22, drawings of parallel lines of particular position - in Fig. 3.23:

a) horizontal lines;
b) frontal lines;
c) profile lines.

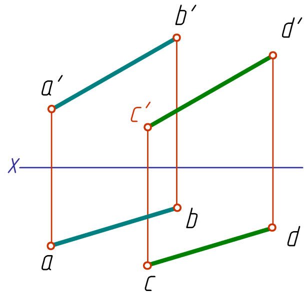


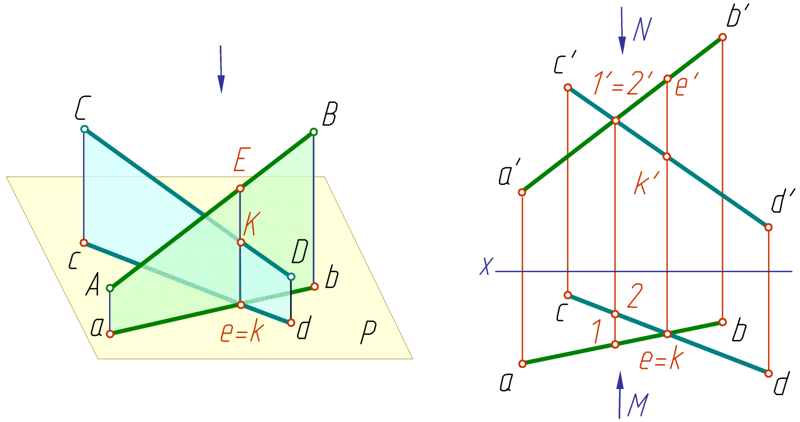
Fig. 3.22 (Рис. 3.22)

О параллельности прямых в пространстве можно судить по параллельности их одноименных проекций на двух плоскостях проекций, но при определенных условиях.

Для прямых общего положения – если одноименные проекции прямых общего положения параллельны в системе двух любых плоскостей проекций, то прямые параллельны (рис. 3.22).

Для прямых частного положения – если одноименные проекции прямых параллельны одной из осей проекций, то прямые параллельны при условии параллельности одноименных проекций на той плоскости проекций, которой параллельны прямые (рис. 3.23, в).

*Скрещивающиеся прямые***.** Если прямые в пространстве не пересекаются, а скрещиваются (рис. 3.24), то на чертеже их одноименные проекции могут и пересекаться, но точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи. Эти точки не являются общими для прямых.



а б (b)

Рис. 3.24 (Fig. 3.24)

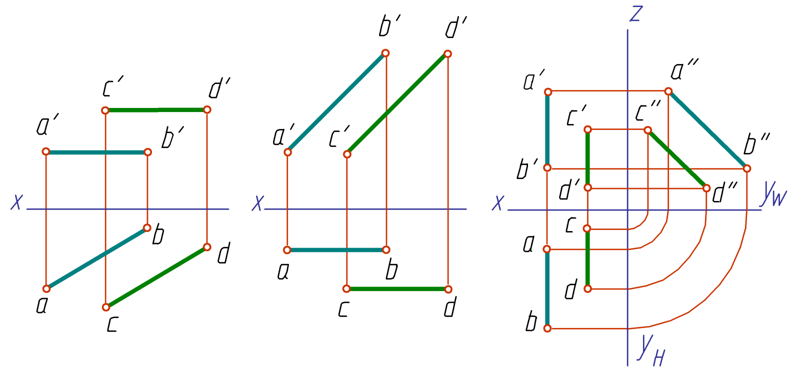
Сравнивая положение таких точек, определяют, какая из изображенных на чертеже прямых выше другой или ближе другой к наблюдателю.

На рис. 3.24, а видно, что точка *E* (принадлежащая прямой *AB*) расположена выше точки *K* (принадлежащей прямой *CD*), и при взгляде сверху по указанной стрелке точка *E* закрывает точку *K*. Соответственно и на чертеже (рис. 3.24, б) фронтальная проекция *e*′ расположена выше фронтальной проекции *k*′, и при взгляде сверху по стрелке *N* при проецировании на плоскость *H* точка *e* закрывает точку *k*. Прямая *AB* проходит над прямой *CD*.

Note. The lines in space are parallel when their like projections on two planes are also parallel, provided:

for the lines of general position - their like projections are parallel in the system of any two projection planes (Fig. 3.22);

for the lines of particular position - their like projections are parallel to one of the projection axis and their like projections are parallel to each other on that projection plane, to which the above lines are parallel (Fig. 3.23).



a b (б) c (в)

Fig. 3.23 (Рис. 3.23)

Skew lines. If the lines in space do not intersect but cross (Fig. 3.24), their like projections in a drawing may intersect , but the intersection points of projections do not lie on one connecting line. These points are not common to the above lines.

Comparing the loci of such points, determine which of the lines in a drawing is situated higher than the other or closer to the viewer.

Fig. 3.24, a - the point *E* (belonging to the line *AB*) is situated above the point *K* (belonging to the line *CD*) and if viewed from above, in the direction of the arrow, the point *E* covers the point *K*. A similar situation is in Fig. 3.24, b - the frontal projection *e*′ is located higher than the frontal projection *k*′, and if viewed from above, in the direction of the arrow *N*, the point *e*, being projected on the plane *H*, covers the point *k*. The straight line *AB* runs above the line *CD*.

На плоскости *V* совпадают фронтальные проекции *1'* и *2'* точек прямых *AB* и *CD*. При взгляде спереди по стрелке *M* видно, что точка *1* прямой *AB* находится ближе к наблюдателю, и при проецировании на плоскость *V* точка *1* прямой *AB* закрывает точку *2* прямой *CD*. Прямая *AB* расположена ближе к наблюдателю.

Рассмотренные точки скрещивающихся прямых, проекции которых на одной из плоскостей совпадают, называются конкурирующими точками.

3.7. Проецирование плоских углов

Любой линейный угол образуется двумя пересекающимися прямыми. На плоскости проекций он проецируется в общем случае с искажением. Однако, если обе стороны угла параллельны какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость угол проецируется без искажения, то есть в истинную величину. Например, стороны угла *ABC* (рис. 3.25) параллельны горизонтальной плоскости *P*, поэтому угол α спроецировался на нее без изменений.

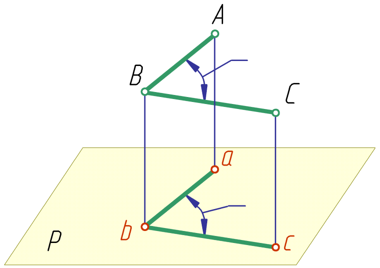


Рис. 3.25 (Fig. 3.25)

Исключение составляет прямой угол, который проецируется в истинную величину и в том случае, когда лишь одна из его сторон параллельна плоскости проекций. Рассмотрим теорему, относящуюся к проецированию прямого угла.

Теорема. Прямой угол проецируется в виде прямого угла, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна.

Пусть сторона *ED* прямого угла *KED* параллельна плоскости *P*, а сторона *EK* ей не перпендикулярна (рис. 3.26). Требуется доказать, что его проекция – угол *ked*=90°.

$$(ED \perp EK) \wedge (ED \,//\, P)\ (EK \not\perp P) \Rightarrow (ed) \perp (ek).$$

Доказательство. Через прямые *EK* и *Ee* проведем дополнительную плоскость *Q*. Плоскость *Q* (так как она проведена через прямую *Ee*, перпендикулярную плоскости *P*) перпендикулярна плоскости *P*. Прямая *ED* перпендикулярна плоскости *Q*, так как она перпендикулярна к двум прямым этой плоскости *EK* и *Ee.* Прямая *ed* также перпендикулярна к плоскости *Q*, так как прямая *ED* и ее проекция *ed* параллельны между собой по условию.

Следовательно, прямая *ed* перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и прямой *ek*, то есть угол *ked* – прямой.

$$(EK) \wedge (Ee) \subset Q;\ \ (ED) \perp (EK);\ \ (ED) \perp (Ee);\ \ (ED) \perp Q;$$
$$(ed) \,//\, (ED),\ \ (ed) \perp Q;\ \ (ed) \perp (ek);\ \ \angle ked = 90°.$$

The frontal projections *1'* and *2'* of the lines *AB* and *CD* coincide on the plane *V*. If viewed in the direction of the arrow *M*, the point *1* of the *AB* line is situated closer to the observer, so, being projected on the plane *V* this point covers point *2* of the line *CD*. The line *AB* lies closer to the observer.

Considered the above points of skew lines, projections of which coincide on one of the planes, are referred to as competitive points.

3.7. Projecting of Plane Angles

Any linear angle is formed by two intersecting lines. It is usually projected onto the projection planes in distortion. However, if both arms of the angle are parallel to one of the projection planes, the angle is projected on this plane without changing it, i.e. in true size. For example, the arms of *ABC* angle (Fig. 3.25) are parallel to the horizontal plane *P*, hence, the angle α is projected on it in true size. *Note.* A right angle with at least one side parallel to one of the projection planes is projected on this plane also as a right angle. Consider a theorem on a right angle projecting.

Theorem. A right angle is projected as a right angle, when one of its arms is parallel to a projection plane and the second arm is not perpendicular to it.
Given: the arm *ED* of the right angle *KED* is parallel to the plane *P*, the arm *KE* is not perpendicular to it (Fig. 3.26). Prove that the angle projection *ked* = 90°

$$(ED \perp EK) \wedge (ED \,//\, P)\ (EK \not\perp P) \Rightarrow (ed) \perp (ek).$$

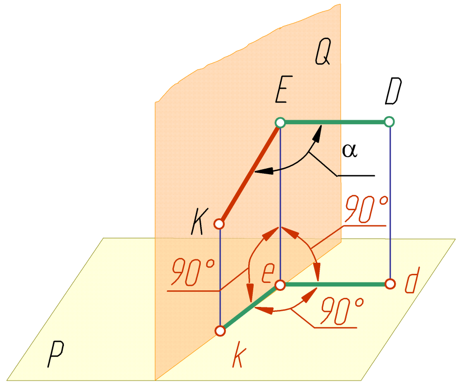


Fig. 3.26 (Рис. 3.26)

Proof. Pass the auxiliary plane *Q* through the lines *KE* and *Ee*. The plane *Q* (being passed through the line *Ee*, perpendicular to the plane *P*) is perpendicular to the plane *P*. The line *ED* is perpendicular to the plane *Q*, as it is perpendicular to two lines (*EK* and *Ee*) of this plane. The line *ed* is also perpendicular to the plane *Q*, as the line *ED* and its projection *ed* are parallel to each other (see given conditions). Hence, the line *ed* is perpendicular to any line, lying in this plane, the line *ek* among them, which means, the angle *ked* is a right angle.

As was to be proved.

$$(EK) \wedge (Ee) \subset Q;\ \ (ED) \perp (EK);\ \ (ED) \perp (Ee);\ \ (ED) \perp Q;$$
$$(ed) \,//\, (ED),\ \ (ed) \perp Q;\ \ (ed) \perp (ek);\ \ \angle ked = 90°.$$

3.8. Определение истинной величины отрезка прямой

Отрезки прямых общего положения ни на одну из плоскостей проекций не проецируются в истинную величину. Однако в ряде задач возникает необходимость определить по чертежу длину отрезка прямой общего положения и углы наклона прямой к плоскостям проекций.

В этом случае используют способ построения прямоугольного треугольника.

Теорема. Истинная величина отрезка прямой общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка на одну из плоскостей проекций, а другим – разность расстояний концов отрезка до этой же плоскости.

Доказательство. Из рис. 3.27 следует, что истинная величина отрезка *AB* будет являться гипотенузой прямоугольного треугольника *AB1*, в котором один катет равен проекции отрезка, а другой – разности расстояний концов отрезка до плоскости проекций.

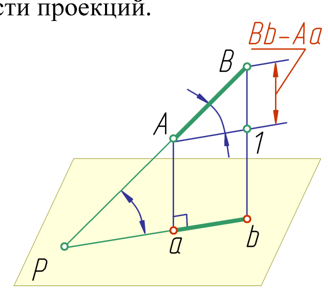


Рис. 3.27 (Fig. 3.27)

Определим истинную величину отрезка *AB* и угол наклона его к плоскости *H* (угол α), если известны две проекции отрезка (рис. 3.28, а).

Построим прямоугольный треугольник, у которого одним катетом будет горизонтальная проекция отрезка, а вторым – разность расстояний концов отрезка до плоскости *H* (разность *z* координат точек *A* и *B*). Истинная величина отрезка *AB* равна гипотенузе ab_0, а угол наклона его к плоскости *H* - угол bab_0 (угол α).

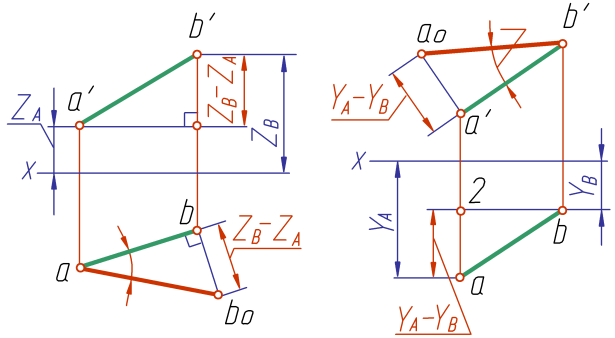
На рис. 3.28, б показано определение истинной величины отрезка *AB* и угла наклона его к плоскости *V* – угла *β*.

3.8 Determining the True Size of a Line-Segment

No segments of the lines of general position are projected on the planes of projection in true size. But the solution of some problems requires determining by a drawing the length of a line-segment and the angle of the inclination of a line to the projection planes.

In this case the method of a right triangle construction is used.

Theorem. The true length of a segment of a line of general position is equal to the hypotenuse of a right triangle one leg of which is a projection of the given line-segment on one of the projection planes, the second leg being equal to the absolute value of the algebraic difference of the distances from the ends of the line-segment to the same plane.



а *b (б)*

Fig. 3.28 (Рис. 3.28)

Proof. Fig. 3.27 shows that the true length of the line-segment *AB* is the hypotenuse of the right triangle *AB1* one leg of which is equal to the projection of the given segment, the second leg - to the absolute value of the algebraic difference of the distances from the ends of the line-segment to the projection plane.

Determine the true length of the line segment *AB* and the angle of its inclination to the plane *H* (angle α) given two projections of the line-segment (Fig. 3.28, a). Construct a right triangle given its two legs: the horizontal projection of the line-segment and a line-segment of length equal to the value of the algebraic difference of the distances from the line-segment ends to the plane *H* (difference of *z* coordinates of the points *A* and *B*). The hypotenuse ab_0 of this triangle will yield the true length of *AB*, and the angle bab_0 - its inclination angle to the plane *H*.

Fig. 3.28, b shows determination of the true size of the line-segment *AB* and its inclination angle to the plane *V* (angle *β*).

Вопросы к главе 3

1. Какая линия называется линией связи?
2. При каком положении относительно плоскостей проекций прямая называется прямой общего положения?
3. Как расположена прямая в системе плоскостей *H*, *V*, *W*, если все три проекции отрезка этой прямой равны между собой?
4. Как построить профильную проекцию отрезка прямой общего положения по данным фронтальной и горизонтальной проекциям?
5. Какие положения прямой линии в системе плоскостей *H*, *V*, *W* считаются частными?
6. Как располагается фронтальная проекция отрезка прямой линии, если его горизонтальная проекция равна самому отрезку?
7. Как располагается горизонтальная проекция отрезка прямой линии, если его фронтальная проекция равна самому отрезку?
8. Что называется следом прямой линии на плоскости проекций?
9. Какая координата равна нулю:
   а) для фронтального следа прямой;
   б) для горизонтального следа прямой?
10. Где располагается горизонтальная проекция фронтального следа прямой линии?
11. Где располагается фронтальная проекция горизонтального следа прямой линии?
12. Как изображаются в системе плоскостей *H*,*V* две пересекающиеся линии?
13. Как могут быть расположены в пространстве друг относительно друга точка и прямая?
14. Как определить по чертежу, принадлежит ли точка прямой?
15. Как определить, какая из двух фронтально-конкурирующих точек видимая?
16. Как установить, какая из двух горизонтально-конкурирующих точек невидимая?
17. Как следует понимать точку пересечения проекций двух скрещивающихся прямых?
18. Какое свойство параллельного проецирования относится к параллельным прямым?
19. Можно ли по чертежу двух профильных прямых в системе плоскостей *H*,*V* определить, параллельны ли между собой эти прямые?
20. Как построить на чертеже прямоугольные треугольники для определения длины отрезка прямой линии общего положения и его углов наклона с плоскостями проекций *H* и *V*?

Questions to Chapter 3

1. What location relative to the projection planes causes a line to be called “a line of general position”?
2. What is the locus of a line in the system of the planes *H*, *V*, *W* given all three projections of the line are equal in length?
3. How do we construct a profile projection of a line of general position given its frontal and horizontal projections?
4. What positions of a straight line in the system of *H*, *V*, *W* planes are considered to be the particular ones?
5. What is the position of a frontal projection of a line-segment given its horizontal projection is equal to the line-segment proper?
6. What is the position of a horizontal projection of a line-segment given its frontal projection is equal to the line-segment proper?
7. What is referred to as “the trace of a straight line on a projection plane”?
8. Which coordinate is equal to zero:
   a) for a frontal trace of a line;
   b) for a horizontal trace of a line?
9. What is the locus of a horizontal projection of a straight line frontal trace ?
10. What is the locus of a frontal projection of a straight line horizontal trace ?
11. How are two skew lines denoted in the system of *H*, *V* planes?
12. What can you say about the intersection point of the projections of two skew lines?
13. What property of parallel projection refers to the parallel lines?
14. Is it possible to determine parallelism of two profile lines by a drawing in the system of *H*, *V* planes?
15. In what case is a right angle projected as a right angle?
16. Can a projection of an acute or obtuse angle, one arm of which is parallel to a projection plane, be equal to the given angle in space?
17. How do we construct right triangles in a drawing in order to determine the length of a segment of a line of general position and its inclination angles to the projection planes *H* and *V*?