

ГЛАВА 2. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Изображения объектов трехмерного пространства на плоскости получают методом проецирования.

Аппарат проецирования включает в себя проецируемый объект, проецирующие лучи и плоскость, на которой получается изображение объекта.

2.1. Центральное проецирование

Центральное проецирование представляет собой общий случай проецирования геометрических образов на заданную плоскость из выбранного центра, не лежащего на этой плоскости. На рис. 2.1 точка S - центр проецирования, плоскость P - плоскость проекций. Для получения центральной проекции точки через нее и центр проецирования проводят проецирующую прямую. Точка пересечения этой прямой с плоскостью проекций является центральной проекцией заданной точки на выбранную плоскость.

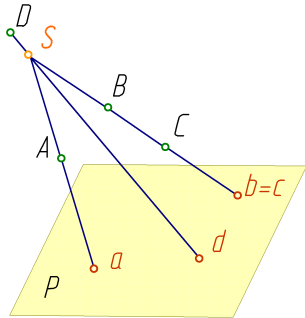


Рис. 2.1 (Fig. 2.1)

Точки a, b, c, d являются центральными проекциями точек A, B, C, D на плоскости P .

Центральные проекции b и c двух различных, но лежащих на одной проецирующей прямой точек B и C , совпадают. Все множество точек пространства, принадлежащих одной проецирующей прямой, имеет при одном центре проецирования одну центральную проекцию.

Следовательно, при заданных плоскости проекции и центре проецирования одна точка в пространстве имеет одну центральную проекцию. Но одна центральная проекция точки не позволяет однозначно определить положение

точки в пространстве, то есть при центральном проецировании отсутствует обратимость чертежа, и для обеспечения обратимости чертежа нужны дополнительные условия.

Центральным проецированием может быть построена проекция любой линии или поверхности как множество проекций всех ее точек. При этом проецирующие прямые, проведенные через все точки кривой линии, в своей совокупности образуют проецирующую коническую поверхность (рис. 2.2) или могут оказаться в одной плоскости (рис. 2.3).

Проекция кривой линии представляет собой линию пересечения проецирующей конической поверхности с плоскостью проекций. Так на рис. 2.2 проецирующая коническая поверхность Φ пересекается с плоскостью проекций P по кривой ab , являющейся проекцией линии AB . Однако проекция линии не определяет проецируемую линию, так как на проецирующей поверхности может быть бесчисленное количество линий, проецирующихся в одну и ту же линию на плоскости проекций.

CHAPTER 2. PROJECTION METHOD

Images of three-dimensional space objects on a plane are made by the projection method.

The projector includes a projectable object, projecting beams and the plane on which the picture of the object appears.

2.1 Central Projection

Central projection is the general case when geometric images are projected on a given plane from a selected outside centre. Figure 2.1 – Point S is the Projection Centre, Plane P is the Projection Plane. To make a central projection of a point, draw a projecting line through the point and the projection centre. The intersection point of this line and the projection plane turns out to be the central projection of the given point on the selected plane.

The a, b, c, d points are the central projections of the A, B, C, D points on the P plane.

B and C are two different points which are situated on one projecting line. That is why the central projections b and c coincide. The whole set of points of one projecting line has only one central projection if there is only one projection centre.

So, on the given plane and given projection centre one point in space has one central projection. But one central projection of a point does not allow us to determine the location of the point in space unambiguously, i.e. in central projecting there is no reversibility of drawing and additional conditions are required to provide drawing reversibility.

Central projection provides imaging of any line or surface as a set of projections of all its points. With this, the projecting lines, collectively, drawn through all points of a curved line, either make a projecting conical surface (Fig. 2.2) or can appear on one plane (Fig. 2.3).

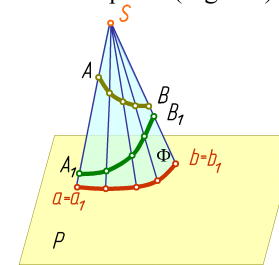


Fig. 2.2 (Рис. 2.2)

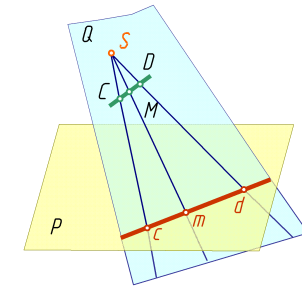


Fig. 2.3 (Рис. 2.3)

The projection of a curved line is a line of intersection of the projecting conical surface and projection plane. Fig. 2.2 - the projecting conical surface Φ intersects the projection plane P along an ab curve which is an AB line projection. However, one projection of a line does not determine the line projected as there

can be an infinite quantity of lines projecting to one and the same line in the projection plane.

При проецировании прямой линии, не проходящей через центр проецирования, проецирующей поверхностью является плоскость. На рис. 2.3 проецирующая плоскость Q , образуемая проецирующими прямыми SC и SD , проходящими через точки C и D прямой, пересекает плоскость проекций P

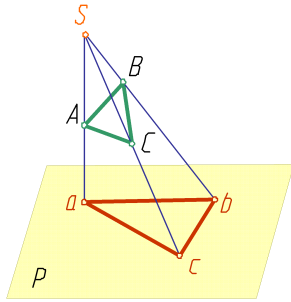


Рис. 2.4 (Fig. 2.4)

по прямой cd , которая является проекцией прямой CD . Так как точка M принадлежит прямой CD , то ее проекция – точка m – принадлежит проекции cd .

Для построения проекций линий, поверхностей или тел часто достаточно построить проекции лишь некоторых (характерных) точек. Например, при построении проекции треугольника (рис. 2.4) достаточно построить проекции трех его точек – вершин A, B, C .

Обобщая рассмотренное, отметим следующие свойства центрального проецирования.

1. При центральном проецировании:
 - а) точка проецируется в точку;
 - б) прямая, не проходящая через центр проецирования, проецируется в прямую (проецирующая прямая – в точку);
 - в) плоская (двумерная) фигура, не принадлежащая проецирующей плоскости, проецируется в двумерную фигуру (фигуры, принадлежащие проецирующей плоскости, проецируются в прямые линии);
 - г) трехмерная фигура проецируется в двумерную;
 - д) центральные проекции фигур сохраняют взаимную принадлежность, непрерывность и некоторые другие геометрические свойства.
2. При заданном центре проецирования фигуры на параллельных плоскостях подобны.

3. Центральное проецирование устанавливает однозначное соответствие между фигурой и ее изображением, например, изображения на киноэкране, фотопленке.

Центральные проекции, обладая большой наглядностью, имеют и недостатки, заключающиеся в сложности построения изображения предмета и определения его истинных размеров. Поэтому этот способ имеет ограниченное применение. Центральное проецирование используется при построении перспектив зданий и сооружений, в живописи и т.д.

2.2. Параллельное проецирование

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования, при котором центр проецирования удален в бесконечность (S_∞). При параллельном проецировании применяют парал-

лельные проецирующие прямые, проведенные в заданном направлении относительно плоскости проекций (рис. 2.5).

The plane serves as a projection surface if a line which does not pass through the projection center is being projected. Figure 2.3 - the projecting plane Q formed by the SC and SD projection lines which pass through the C and D points of a straight line, intersects the projection plane P along the cd line which is the projection of the above line. As the M point belongs to the CD line then its projection - m point - belongs to the cd projection.

The construction of projections of lines, surfaces or bodies very often requires the construction of projections of some characteristic points only. For example, to construct a projection of the ABC triangle (Fig. 2.4) it is enough to build projections of its three points - A, B, C vertices.

To summarize the material above let us note the following properties of central projection:

- I. Under central projection
 - a) a point projects to a point;
 - b) a line not passing through the projection center projects to a line (projecting line - to a point);
 - c) a plane (two-dimensional) figure not belonging to the projecting plane projects to a two-dimensional figure (figures belonging to the projecting plane project to straight lines);
 - d) a three-dimensional figure projects to a two-dimensional one;
 - e) a central projection of figures keep mutual belonging, continuity and some other geometric properties
2. Under the given projection center figures of parallel planes are similar.
3. Central projection provides unambiguous similarity of the figure and its projection, for example, projection on a screen or a film.

In spite of visualization, a great positive property, central projections still have some disadvantages such as the complexity of a subject image construction and its real dimension determination. That is why this method is limited in usage. Central projection is used in constructing building perspectives, in painting, etc.

2.2 Parallel Projection

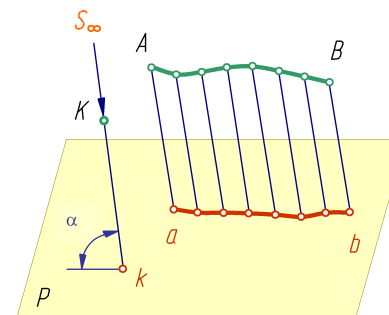


Fig. 2.5 (Рис. 2.5)

Parallel projection is one of the cases of central projection, where the center of projection is infinitely distant (S_∞). In this case parallel projecting lines are used, drawn in the given direction relative to the plane of projections (Fig. 2.5).

Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проекции называют прямоугольными или ортогональными, в остальных случаях – косоугольными.

На рис. 2.5 направление проецирования указано стрелкой под углом $\alpha \neq 90^\circ$ к плоскости проекций P .

При параллельном проецировании сохраняются все свойства центрального проецирования, которые дополняются новыми:

1. Параллельные проекции взаимно параллельных прямых параллельны, а отношение длин отрезков этих прямых равно отношению длин их проекций.

2. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в такую же фигуру.

3. Параллельный перенос фигуры в пространстве или плоскости проекций не изменяет вида и размеров проекции фигуры.

Применяя приемы параллельного проецирования точки и линии, можно строить параллельные проекции поверхности и тела. Параллельные проекции, как и центральные, не обеспечивают обратимости чертежа.

2.3. Способы дополнения проекционных чертежей

При проецировании на одну плоскость проекций между проецируемой фигурой и ее проекцией не существует взаимнооднозначного соответствия. Так, каждому проецируемому предмету при заданном его положении и выбранном направлении проецирования L соответствует единственная его проекция. Однако полученная фигура может быть проекцией бесконечного множества других фигур, отличных друг от друга как по величине, так и по форме. Из рис. 2.6 видно, что пространственной точке M соответствует единственная ее проекция на плоскости P – точка m . В то же время точка m является проекцией множества точек, лежащих на проецирующей прямой (M, M_1, M_2, M_3).

Прямолинейный отрезок mn может быть проекцией не только прямолинейного отрезка M_1N_1 или M_2N_2 , но проекцией кривой линии M_3N_3 и любой плоской фигуры, расположенной в проецирующей плоскости.

Следовательно, изображение пространственной фигуры является не полным. Чертеж можно правильно понять лишь в том случае, если он будет сопровождаться дополнительными пояснениями.

Рассмотрим некоторые способы дополнения проекционного изображения, позволяющие сделать его «обратимым», то есть однозначно определяющим проецируемый предмет.

If the direction of projecting is perpendicular to the plane of projections, the last are called rectangular or orthogonal. In other cases they are called oblique projections.

In Fig. 2.5 the direction of projection is shown by the arrow at an angle $\alpha \neq 90^\circ$ with the projection plane P .

Parallel projection possesses all the properties of central projection and the following new ones:

1. Parallel projections of mutually parallel lines are parallel, and the ratio of those lines segments is equal to the ratio of their projections lengths.

2. A plane figure parallel to a projection plane projects to the same figure on the above plane.

3. A parallel transfer of a figure in space or in projection plane does not change the shape or dimensions of the figure projection.

Using parallel projection of a point and a line, one can draw parallel projections of a surface and a body. Neither parallel nor central projections provide drawing reversibility.

2.3. Methods of Projection Drawings Supplement

In projecting on one projection plane there is no one-to-one correspondence between the figure and its projection. At the given position and set direction, only one projection corresponds to the subject projected.

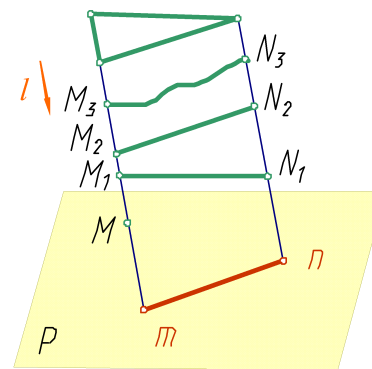


Fig. 2.6 (Рис. 2.6)

However, the figure obtained can be a projection of an infinite set of other figures, different in size and form. Figure 2.6 shows that m is the only projection of the spatial point M on the plane P . At the same time the point m is the projection of a set of points situated on the projecting line (M, M_1, M_2, M_3). The segment mn can be a projection not only of the segment M_1N_1 or M_2N_2 , but a projection of the curve M_3N_3 and of any plane figure situated in the projecting plane.

Therefore, representation of the figure is not complete. The drawing can be understood clearly only if there are some additional clarifications.

Let us consider a few supplementary methods of the projection representation which provide the opportunity to make it «reversible», i.e. unambiguously similar to the object projected.

Способ проекций с числовыми отметками

Этот способ лежит в основе построения чертежей планов местности и некоторых инженерных сооружений (плотин, дорог, дамб и т.п.). Сущность способа состоит в том, что положение любой точки в пространстве определяют ее прямоугольной проекцией на некоторую горизонтальную плоскость, которую принимают за плоскость нулевого уровня (рис. 2.7).

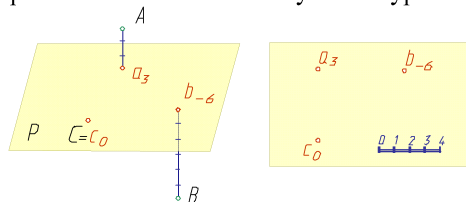


Рис. 2.7 (Fig.2.7)

Рядом с проекциями точек (a, b, c) указывают их отметку, то есть число единиц длины, определяющих расстояние от точки до плоскости проекций.

Способ векторных проекций

Академик Е.С. Федоров предложил изображать высоты точек при помощи параллельных отрезков на плоскости проекций, начало которых находятся в проекциях соответствующих точек. Направление всех высотных отрезков произвольно. Для точек, расположенных выше горизонтальной плоскости, высотные отрезки, а также числовые отметки считаются положительными. Для точек, расположенных ниже плоскости – отрицательными. Положительные и отрицательные высотные отрезки в «федоровских проекциях» отличаются противоположным направлением. Чертежи в «федоровских проекциях» применяют в геологии, горном деле, топографии (рис. 2.8).

Способ прямоугольных проекций

Чертеж в системе прямоугольных проекций образуется при проецировании предмета не на одну, а на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Этот способ является частным случаем параллельного проецирования, при котором направление проецирования L перпендикулярно плоскости проекций. Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки называют основание перпендикуляра, проведенного из точки на плоскость проекций.

Осуществлять проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости впервые предложил Гаспар Монж.

Такое проецирование обеспечивает обратимость чертежа, то есть однозначное определение положения точки в пространстве по ее проекциям. Одну из плоскостей принято располагать горизонтально – ее называют горизонтальной плоскостью проекций H , другую ей перпендикулярно. Такую вертикальную плоскость называют фронтальной плоскостью проекций V . Эти плоскости проекций пересекаются по линии, называемой осью проекций (рис. 2.9).

Method of Projection with Digital Marks

This method is primarily used in drawings of landscape plans and some engineering facilities (such as dams, roads, dikes, etc.). The essence of the method is that the position of any point in space is specified by its rectangular projection on a horizontal plane taken for a zero plane (Fig. 2.7).

Near the projections of the points (a, b, c) their marks are shown, i.e. a number of length units, determining the distance from a point to the projection plane.

Method of Vector Projections

Academician E.S. Fyodorov suggested the representation of the points altitudes (heights) by means of parallel segments in the projection plane, the beginnings of which are situated on the projections of the respective points.

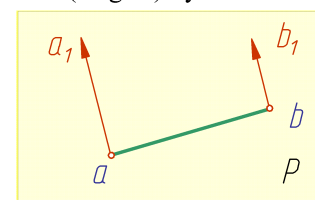


Fig. 2.8 (Рис. 2.8)

The directions of all altitude segments are arbitrary. If the points are located above the horizontal plane, the altitude segments, as well as digital marks are considered to be positive. In the opposite case (if the points are below the plane) – negative. Positive and negative altitude segments in «Fyodorov's projections» differ in direction.

Drawings produced by method of «Fyodorov's projections» are used in geology, mining, topography (Fig. 2.8).

The Method of Orthogonal Projections

Drawing in a system of rectangular projections is constructed by projecting a component on two or three mutually perpendicular planes of projection. This method is a special case of parallel projection, when the direction of projecting is perpendicular to the projection plane.

The foot of the perpendicular drawn from a point to the projection plane is called the rectangular (orthogonal) projection of the point.

Jasper Monge was the first to make the projection on two mutually perpendicular planes.

Such a kind of projection ensures drawing reversibility, i.e. an unambiguous determination of a point position in space by its projections. One of the planes is usually arranged horizontally, and it is called the horizontal projection plane H , the other is perpendicular to it.

Such a vertical plane is called the frontal projection plane V .

The line of intersection of the above planes is called the projection (or coordinate) axis (Fig. 2.9).

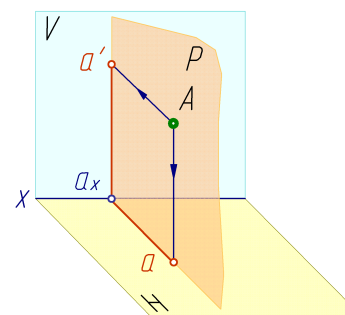


Fig. 2.9 (Рис. 2.9)

Для получения проекций точки на плоскости опускаем из точки A в пространстве перпендикуляры (проецирующие лучи) до встречи с плоскостями H и V . Проецирующие лучи образуют плоскость P , которая перпендикулярна плоскостям H и V и пересекает эти плоскости по прямым, перпендикулярным оси проекций, а саму ось в точке a_x , то есть прямые aa_x , $a'a_x$ и ось x взаимно перпендикулярны.

Построение некоторой точки A в пространстве по двум заданным ее проекциям – горизонтальной a и фронтальной a' показано на рис. 2.10. Точку A находят в пересечении перпендикуляров, проведенных из проекции a к плоскости H и из проекции a' к плоскости V . Проведенные перпендикуляры принадлежат одной плоскости P , перпендикулярной плоскостям H и V , и пересекаются в единственной искомой точке A пространства.

Таким образом, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Вопросы к главе 2

1. В чем состоит сущность процесса проецирования?
2. Как строится проекция точки центральном проецировании?
3. В каком случае проекция точки будет совпадать с точкой – оригиналом?
4. В каком случае при центральном проецировании проекция прямой линии представляет собой точку?
5. В чем заключается способ проецирования, называемый параллельным?
6. Как строится параллельная проекция прямой линии?
7. Может ли параллельная проекция прямой линии представлять собой точку?
8. Какие свойства, являются общими для центрального и параллельного проецирования?
9. Если точка принадлежит прямой, то как располагаются их проекции?
10. Для какой цели используется дополнение проекционных чертежей?
11. Назовите способы дополнения проекционных чертежей?

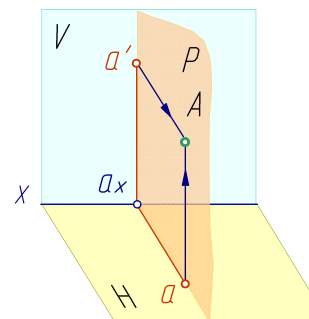


Fig. 2.10 (Рис. 2.10)

To obtain a point projection on a plane drop perpendiculars (projecting beams) from the spatial point A to the planes H and V . The projecting beams produce the plane P which is perpendicular to the planes H and V and cuts these planes along the lines perpendicular to the projection axis, and the axis proper - in the point a_x . Consequently, the lines aa_x , $a'a_x$ and the axis x are mutually perpendicular.

Construction of a certain spatial point A from given its two projections (the horizontal one a and the frontal one a') is shown in Fig. 2.10. Find the point A in the intersection of the perpendiculars drawn from the projection a onto the plane H and from the projection a' onto

the plane V . The above perpendiculars belong to one plane P perpendicular to H and V planes, and intersect in the only spatial point A , which is the desired one.

Thus, two orthogonal projections of a point fully determine its position in space relatively to a given system of mutually perpendicular projection planes.

Questions to Chapter 2

1. What is the method of construction of the central projection of a point?
2. In what case is the central projection of a straight line represented by a point?
3. What is the essence of the parallel projection method?
4. How is the parallel projection of a line constructed?
5. Can the parallel projection of a line be represented by a point?
6. What are the positions of a point and a line projections if the point lies on the line?